Matemáticas 3

Secundaria

Elena Emilia García Solana
Citli Salvador Villegas Durán
Erica López Espíndola

Norma

Esta obra fue elaborada bajo la dirección editorial de Lorenza Cecilia Estandía González-Luna.

Participaron en la presente edición:

Jefe editorial: Alejandro Barrera Damián
Coordinación editorial: Mariana Barrientos Padilla
Edición: Salvador Torres Díaz
Asistente editorial: Azahariel Ramírez García
Revisión técnico-pedagógica: Andrea Rocío Caballero Castellanos
Corrección de estilo: Claudia Contreras Peña
Lecturas ortotipográficas: Claudia Contreras Peña
Coordinación de diseño: Carlos García Ortega
Diseño de interiores: ByColor Soluciones Gráficas
Diseño de cubierta: Carlos García Ortega
Diagramación: Alexandro Portales Padilla
Asistencia iconográfica: Griselda Ortigoza Alcalá
Fotografías: Archivo Norma (Agral), Shutterstock, Carlos García Ortega
Ilustración: John Paul Art, Diana Ortíz, Upifania.com, Alexandro Portales Padilla

Matemáticas 3. Tercer grado de secundaria

ISBN 978-607-722-143-2

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición: 2014

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres de Reproducciones Fotomecánicas S.A. de C.V. con domicilio en calle Durazno 1, Col. Las peritas, Delegación Xochimilco, C.P. 16010, Ciudad de México, en el mes de abril de 2016.

Presentación para el alumno

Bienvenido a *Matemáticas 3. Tercer grado de secundaria*. Este libro pretende que adquieras conocimientos llenos de retos y sorpresas, a cuya culminación dispondrás de las herramientas necesarias para proseguir la educación media.

En él encontrarás actividades especializadas que te permitirán desarrollar uno de los rasgos esenciales de la naturaleza humana: el pensamiento matemático. Están distribuidas en 33 lecciones, agrupadas en 5 bloques temáticos, y tienen el propósito central de aprovechar tu curiosidad y entusiasmo característicos para despertar el interés por investigar y resolver problemas. Con objeto de que aproveches las propuestas didácticas, te recomendamos que en cada situación trates de encontrar tus formas de solución, explores otras posibilidades, pongas en juego diversas estrategias, valides tus conjeturas y argumentes el uso de las herramientas matemáticas.

En cada lección encontrarás algo más que problemas por resolver: curiosidades matemáticas, juegos, retos, nuevos conceptos, aplicaciones prácticas, recursos digitales, vínculos con otros aspectos de la vida humana y muchos otros elementos, los cuales harán de estas páginas una puerta hacia el maravilloso mundo de las matemáticas.

Situaciones didácticas que estarán relacionadas con tu vida diaria, ¿alguna vez te has preguntado qué aplicación tienen las ecuaciones cuadráticas?, ¿qué tan importante es la matemática en el diseño, la construcción, al medir distancias sin utilizar instrumentos o incluso la relación que tienen las sombras de algún objeto con su altura?

Esperamos que con estas lecciones veas la utilidad matemática desde otra perspectiva, del ámbito escolar que consolidará tu formación como estudiante a su aplicación práctica y cotidiana en la comunidad donde vives, en la cual siempre está presente y a la vuelta de la esquina.

Estamos convencidos de que *Matemáticas 3* será una herramienta fundamental para que termines con éxito la última fase de la educación básica.

Recuerda: la recompensa con la asignación de tu nueva escuela será proporcional al esfuerzo realizado en cada actividad que desarrolles en el salón de clases y en tus asignaturas: cuanto más preparado termines la secundaria, mejores opciones de colegio y horarios tendrás... La matemática es la llave que abre puertas, horizontes y oportunidades. ¡Aprovéchala!

Los autores

Presentación para el profesor

En *Matemáticas 3. Tercer grado de secundaria*, usted encontrará una herramienta flexible que apoye su trabajo en el diseño de las situaciones didácticas necesarias para que sus estudiantes alcancen los aprendizajes esperados con la mayor calidad.

Sus jóvenes alumnos requieren un ambiente de trabajo que les lleve a desarrollar conocimientos y habilidades para enfrentar con éxito un mundo cada vez más competitivo, en el que las competencias matemáticas son de suma importancia. Con este propósito fue diseñada la estructura pedagógica de la obra.

En ese sentido, las situaciones y secuencias didácticas son un verdadero andamiaje educativo, donde juegan un papel relevante la actividad común entre los alumnos y la participación activa del docente. Así, cada lección es dinámica y está diseñada con un "Punto de partida", que pretende captar el interés de los alumnos y recuperar experiencias previas que, a manera de evaluación diagnóstica, al final y durante la lección les servirán para reconocer su aprendizaje, el cual se concreta con la sección "Ya lo aprendimos".

En apoyo a la dinámica de esta estructura pedagógica, se incluyen secciones que complementan los contenidos, como el *Glosario*, sobre el abordaje de nuevos conceptos o términos especializados; *¡Qué curioso!*, cuyos datos relacionan los contenidos con situaciones de la vida real; *Y mientras tanto en…*, la cual vincula en forma directa los aprendizajes de Matemáticas 3 con otras asignaturas, y *TIC y más* que ofrece enlaces a páginas electrónicas o sitios educativos de internet, que disponen de herramientas digitales, programas de cálculo, probabilidad, ejercicios en línea y actividades multimedia.

En esta última fase del periodo escolar básico, a través de las actividades que en este libro se proponen, sus alumnos construirán conceptos matemáticos que les permitirán acceder a ideas cada vez más complejas. A diferencia del conocimiento enciclopédico, un rasgo distintivo de esta obra tiene que ver con la variedad y sencillez en el planteamiento de actividades y la dinámica de equipos. En este trayecto, planteamos problemas y soluciones a partir de situaciones concretas de la vida real, como medir la sombra de un árbol para calcular cierta longitud o estimar la distancia de la Tierra a la Luna con base en las medidas de un triángulo, entre muchas más que con toda seguridad despertarán el interés de los estudiantes por ampliar sus horizontes de aprendizaje con herramientas cognitivas.

También hacemos énfasis en que el proceso de evaluación sea una constante y no un fin en sí mismo, por ello encontrará evaluaciones al final de cada bloque temático y al interior de cada lección, con la intención de que los alumnos valoren su desempeño y consideren, en forma permanente, la importancia del esfuerzo y entusiasmo compartidos.

Confiamos en que las enseñanzas de este libro, con la valiosa intermediación de usted, permitirá al estudiante avanzar en sus conocimientos y aplicarlos en su vida diaria, con herramientas que les serán útiles por muchos años, y deje a usted la satisfacción y el remanente social de contribuir en forma decidida a la enseñanza-aprendizaje de la matemática como asignatura fundamental. Estamos seguros de que el vínculo que estableceremos con usted, a través de esta obra, fructificará en escenarios innovadores en beneficio del desarrollo curricular de los estudiantes.

Los autores

Índice

MATEMÁTICAS 3

Bloque 1

MATEMÁTICAS 3						
Bloque 2						
Aprendizajes esperados	**Eje**	**Tema**	**Contenido**	**No. de semana**	**No. de lección**	**Página**
• Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan. • Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	9	8. Los diseños de aluminio	60
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	10	9. Rotación y traslación	66
			Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	11	10. Composición de transformaciones geométricas	72
		Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	12	11. ¿Áreas iguales?	78
			Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	13	12. Un famoso teorema	86
	Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	14	13. Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes	92
Repaso de bloque / Evaluaciones				15		100

MATEMÁTICAS 3						
Bloque 3						
Aprendizajes esperados	**Eje**	**Tema**	**Contenido**	**No. de semana**	**No. de lección**	**Página**
• Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado. • Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	16	14. ¿Una fórmula general?	104
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	17	15. Aplicaciones de los criterios de congruencia y semejanza	108
			Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	18	16. ¡Con razón!	114
			Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	19	17. Proyección matemática	120
	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	20	18. Gráficas del movimiento acelerado	126
			Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	21	19. Rectas y curvas	134
		Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	22	20. Probabilidad de eventos independientes	140
Repaso de bloque / Evaluaciones				23		146

MATEMÁTICAS 3

Bloque 4

Aprendizajes esperados	Eje	Tema	Contenido	No. de semana	No. de lección	Página
• Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. • Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. • Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	24	21. El *n*-igma matemático	150
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	25	22. Sólidos de revolución	156
		Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	26	23. La pendiente de una recta	162
			Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	27	24. Los triángulos rectángulos	168
			Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	28	25. Trigonometría	176
	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	29	26. Razón de cambio y sus propiedades	182
		Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	30	27. Analizando datos	190
Repaso de bloque / Evaluaciones				31		196

MATEMÁTICAS 3

Bloque 5

Aprendizajes esperados	Eje	Tema	Contenido	No. de semana	No. de lección	Página
• Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	32	28. Resolviendo problemas con ecuaciones	200
• Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.	Forma, espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	33	29. Secciones cónicas y secciones cilíndricas	206
			Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	34	30. El volumen de conos y cilindros rectos	210
			Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	35	31. Cilindros y conos	216
• Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	36	32. Variación lineal y cuadrática	222
• Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.		Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	37	33. Eventos con igual probabilidad	228
Repaso de bloque / Evaluaciones				38		234
Repaso general				39-40		
Bibliografía						237

¿Cómo es tu libro?

- **Apertura de bloque.**

  Cada bloque inicia con dos páginas de entrada, en una de ellas están los aprendizajes que habrás de adquirir a lo largo del bloque. Se incluye una breve reflexión de algún tema relacionado con las matemáticas.

- **Lecciones.**

  Cada bloque está integrado por lecciones, cuyo eje, tema y contenido se muestran en la esquina superior. Tienen una estructura bien definida, la cual se describe a continuación.

- **Introducción.**

  Te proporciona los conceptos básicos para que comprendas en qué consiste la lección, qué elementos, factores o atributos intervienen y que utilidad tienen.

- **Punto de partida.**

  Es una sección exploratoria que da inicio a cada lección, parte de identificar lo que sabes del contenido para que reconozcas después lo aprendido; aquí se plantean actividades que tienen que ver con tu vida diaria y tu entorno inmediato.

- **Aprendemos.**

  Indica el comienzo de las actividades que, según su naturaleza y alcance, se desarrollan en forma individual, en pareja, equipo o grupo. Algunas están pensadas para que construyas tus aprendizajes y en su mayoría guardan relación entre contenidos y situaciones cotidianas.

- **¡Ya lo aprendimos!**

  Aquí se concretan los aprendizajes planteados al inicio de la lección, con información teórica y práctica que te permita comprender los conceptos abordados.

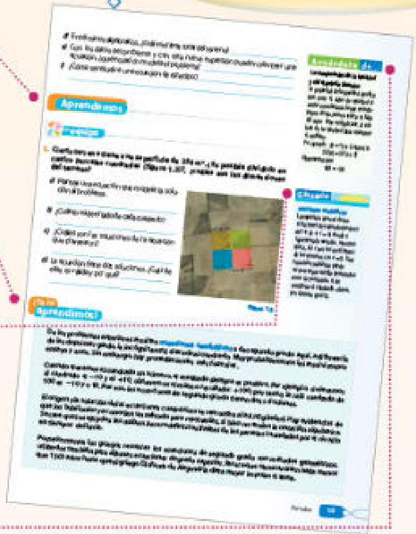
- **Glosario.**

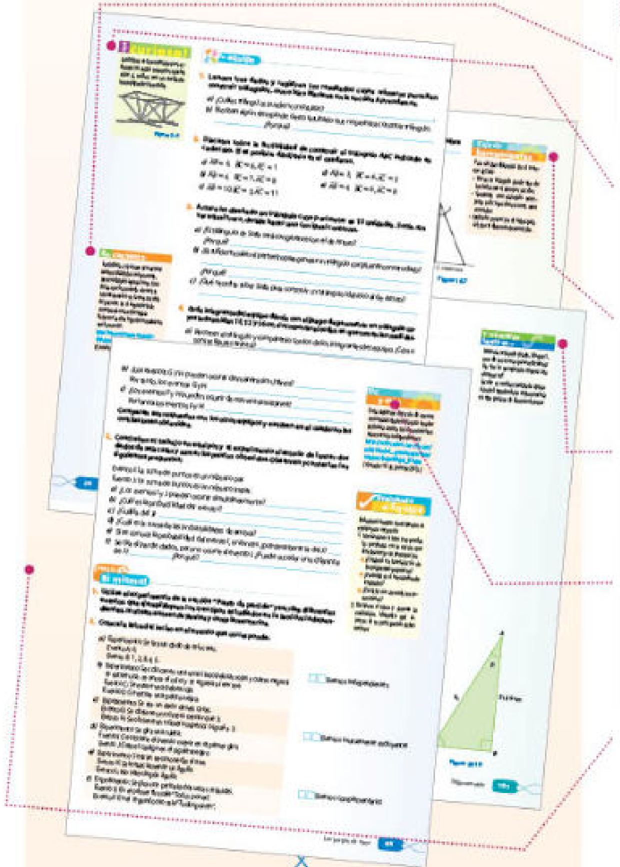
  Te apoyará en esclarecer los conceptos o términos difíciles de entender, y es una herramienta útil para que comprendas el texto y avances en la lección sin tropiezos.

- **Acuérdate de ...**

  Establece una referencia directa entre algún problema o situación planteada en la lección con el concepto, teoría o ecuación desarrollada en anteriores lecciones; funciona como un *tip o pista para encontrar la fórmula o herramienta adecuada.*

¿Cómo es tu libro?





- **En contexto**

  Muestra en cada lección el uso de las matemáticas en temas de relevancia social, como educación financiera, ambiental, para la salud, entre otros.

- **¡Qué curioso!**

  Proporciona datos técnicos, históricos o anecdóticos relacionados con el uso de las matemáticas a través del tiempo y el tema a tratar; que complementan y hacen más interesantes los contenidos.

- **Caja de herramientas.**

  Te proporciona los medios, criterios, fórmulas o teorías para solucionar un problema cuya complejidad o procedimiento requiere mayor información.

- **Y mientras tanto en...**

  Relaciona los contenidos de las lecciones de Matemáticas con las diversas asignaturas que cursas, en las que puedes aplicar los aprendizajes adquiridos.

- **TIC y más.**

  Sugiere vínculos a páginas electrónicas y sitios educativos o culturales de internet, que tienen disponibles ejercicios en línea, programas de cálculo o multimedia y otras herramientas que sirven de apoyo a los contenidos de cada lección.

- **¡Hazlo tú mismo!**

  Esta sección cierra la secuencia iniciada al principio o en el desarrollo de la lección, consiste en una serie de actividades en las que aplicarás tus aprendizajes en función del producto, situación o problema anunciado en Punto de partida.

Bloque 1

Aprendizajes esperados

Al terminar el estudio del presente bloque serás capaz de:

- Explicar la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes o independientes.

Antes de iniciar el curso date un tiempo y reflexiona sobre lo siguiente: ¿qué son las matemáticas, cómo se aplican y para qué sirven? Piensa cómo sería la vida hoy sin los conocimientos que grandes estudiosos de esta disciplina han aportado a lo largo de la historia. ¿Tendríamos los mismos avances científicos y tecnológicos?, ¿entenderíamos lo que sucede en la naturaleza y en el Universo?

Hace poco más de un siglo, el filósofo y matemático francés Henri Poincaré expresó: "Todo saber tiene de ciencia lo que tiene de matemática"; y en efecto, así es. Algo maravilloso que has aprendido de ésta es que nos ayuda a entender y a comunicar todo cuanto ocurre en el mundo físico y ciertos procesos de la vida cotidiana. ¿No te parece sorprendente que una gráfica o una expresión matemática sean modelos que representen esos sucesos y fenómenos? En este bloque, y en general en el curso, estudiarás varios temas de forma tal que encontrarás el vínculo entre la ciencia y las matemáticas.

Lección 1

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema: Patrones y ecuaciones.
Contenido: Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Parcelas

Las ecuaciones cuadráticas representan una herramienta para resolver múltiples problemas de la vida diaria. Algunos de éstos son sencillos y pueden solucionarse con métodos aritméticos, pero la mayoría de las veces conviene plantear una ecuación, pues sin ella resultaría difícil resolverlos.

En la lección explorarás este tipo de ecuaciones mediante la resolución de problemas con procedimientos personales u operaciones inversas sobre áreas de figuras geométricas.

Punto de partida

1. Don Miguel se dedica a la agricultura; este año decidió fraccionar su terreno en parcelas para cosechar varios frutos a la vez. Dispuso plantar duraznos en un área con forma cuadrada y ciruela en el resto del terreno, como muestra la figura 1.1:

a) ¿Qué forma tiene el terreno a fraccionar? ______

b) ¿Cuáles son las medidas del terreno? ______

c) ¿Cuántos metros cuadrados destinó a los duraznos? ______

d) ¿Y a la ciruela? ______

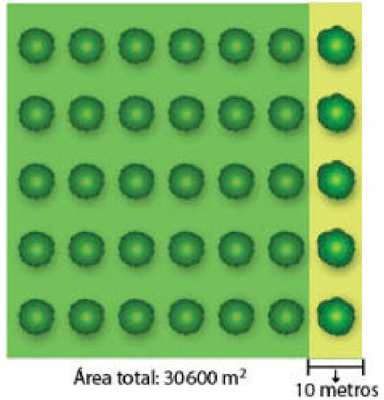


Figura 1.1

2. Reúnete con un compañero y contesten lo siguiente:

a) ¿Obtuvieron las mismas respuestas? ______

b) ¿Cuántas soluciones encontraron? ______

c) ¿Son las únicas soluciones? ______

d) ¿Qué procedimientos siguieron para responder las preguntas? ______

3. Con la guía del profesor, observen la Figura 1.1, analicen y respondan.

a) ¿Cómo se obtiene el área de una superficie rectangular? ______

b) ¿Y si la superficie es cuadrada? ______

4. El problema anterior puede resolverse planteando una ecuación.

a) Si x representa el lado de la parcela cuya superficie es cuadrada, ¿qué expresión matemática modela la longitud de largo y ancho de todo el terreno? ______

b) ¿Qué expresión corresponde a la superficie destinada para el durazno? ______

c) ¿Qué término matemático representa el área reservada para la ciruela? ______

¡Qué curioso!

La palabra *parcela* proviene del francés *parcelle*, originada del latín *particella*. El término se utiliza para nombrar una porción pequeña de terreno, que puede ser el sobrante de otra mayor que se ha comprado, expropiado o adjudicado.

(Tomado de Real Academia Española) http://lema.rae.es/drae/?val=parcela http://definicion.de/parcela/#ixzz2AVcrlg6h (Consulta: 13 de enero de 2017)

Caja de herramientas

Quizá se te dificulte resolver el problema; ¡puedes usar calculadora! Algunas calculadoras tienen las teclas MR y M+, a fin de guardar el dato presentado en el visor; esto ayuda a realizar cálculos más rápidos. En otras puedes incluso modificar los datos en pantalla. Recuerda: si la tuya es científica, no hay necesidad de presionar varias veces =, pues ella misma hace los resultados parciales internamente y entrega el resultado final cuando presionas la tecla =.

d) En términos algebraicos, ¿cuál es el área total del terreno? ______

e) Con los datos del problema y con esta nueva expresión pueden plantear una ecuación, ¿qué ecuación modela el problema? ______

f) ¿Cómo se resuelve una ecuación de este tipo? ______

Aprendemos

En equipo

1. Cierto terreno tiene una superficie de 256 m². ¿Es posible dividirlo en cuatro parcelas cuadradas (figura 1.2)?, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

a) Plantea una ecuación que modele la solución al problema. ______

b) ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado? ______

c) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación que plantearon? ______

d) La ecuación tiene dos soluciones, ¿cuál de ellas es válida y por qué? ______

Figura 1.2

Acuérdate de...

Las propiedades de la igualdad y el despeje de fórmulas

La propiedad de la igualdad significa que como el signo de igualdad es similar a una balanza, lo que se multiplique, divida, sume o reste a un lado del signo debe multiplicarse al otro lado de la igualdad para mantener el equilibrio.

Por ejemplo: $20 = 15 + 5$, entonces $5(20) = 5(15 + 5)$

Observamos que $100 = 100$

Glosario

ecuaciones cuadráticas: La expresión general de las ecuaciones de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$, donde x representa la variable, mientras que a, b y c son los coeficientes de los términos con $a \neq 0$. Una ecuación cuadrática puede resolverse por medio de métodos como factorización, el de completar el cuadrado, o bien, por fórmula general.

¡Ya lo aprendimos!

De los problemas anteriores resultan ecuaciones cuadráticas o de segundo grado: aquí, a diferencia de las de primer grado, la incógnita está elevada al cuadrado. Muy probablemente las resolviste por ensayo y error. Sin embargo, hay procedimientos más formales.

Cuando elevamos al cuadrado un número, el resultado siempre es positivo. Por ejemplo, si elevamos al cuadrado el -10 y el $+10$, obtenemos el mismo resultado: $+100$; por tanto, la raíz cuadrada de 100 es -10 y $+10$. Por eso, las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones.

El origen y la solución de las ecuaciones cuadráticas se remontan a la Antigüedad. Hay evidencias de que los babilonios ya conocían un método para resolverlas, si bien no tenían la notación algebraica. Se cree que los egipcios las usaban para redefinir los límites de las parcelas inundadas por el río Nilo en tiempos de lluvia.

Posteriormente, los griegos resolvían las ecuaciones de segundo grado con métodos geométricos, utilizados también para algunas ecuaciones de grado superior. Parece que transcurrirían nada menos que 1 500 años hasta que el griego Diofanto de Alejandría diera mayor impulso al tema.

Individual

¡Qué curioso!

El puente Golden Gate (figura 1.3) enmarca la entrada de la bahía de San Francisco, en California, Estados Unidos de América. Sus torres miden 227.38 m de altura y las separa una distancia de 1 280.16 m. Está suspendido de dos enormes cables de 0.91 m de diámetro, la calzada tiene un ancho de 27.43 m y se encuentra aproximadamente a 67.06 m del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro de la plataforma.
Tomado de http://aportemath.blogspot.mx/2011/04/aplicacion-de-las-funciones-cuadraticas.html
(Consulta: 24 de enero de 2017)

Figura 1.3 Si quisieras determinar la altura de los cables a una distancia de 304.8 m del centro del puente, ¡necesitarías una ecuación de segundo grado!

1. **Expresa la ecuación que permite calcular las dimensiones de los terrenos mostrados en las figuras 1.4 y 1.5, y calcula la longitud de los lados.**

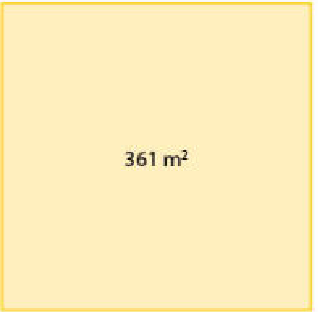


Figura 1.4

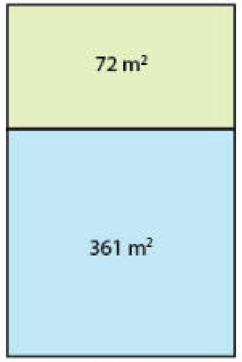


Figura 1.5

Ecuación: ____________ Ecuación: ____________

Medida de los lados: ____________ Medida de los lados: ____________

En contexto

En matemáticas el término agrimensura se refiere a la delimitación de superficies mediante ecuaciones cuadráticas sencillas, que son de mucha utilidad para la medición de áreas, rectificación de límites y valuación de espacios públicos, parcelas e inmuebles privados; es útil también para trazar caminos, delimitar poblados y aprovechar en forma óptima los recursos naturales, mediante la plantación planificada de especies que contribuyan a mejorar el ambiente en áreas protegidas, bosques, campos agrícolas, parques y jardines.

Una bodega tiene un área de 299 m² y una sección cuadrada de terreno, de 5 m por lado, que se usa como estacionamiento, como se muestra en la figura 1.6. Calcula cuánto mide por lado todo el terreno.

____

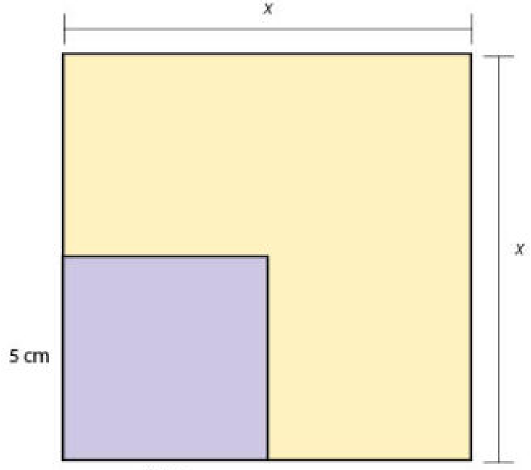


Figura 1.6

En equipo

Resuelvan los siguientes problemas:

1. **Para empacar ciruelas se construyen cajas sin tapa; se utilizan pliegos de cartón en forma cuadrada, a los que se recortan las esquinas, como se muestra en la figura 1.7. La caja resultante tiene una altura de 10 cm y un volumen de 1 000 cm³.**

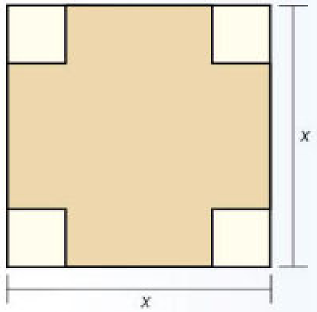


Figura 1.7

   a) ¿Qué expresión modela el problema? ____________
   b) ¿Cuál es la medida necesaria para hacer la caja? ____________
   c) ¿Cuánto mide el área de la base de la caja? ____________
   d) ¿Qué superficie ocupa la caja antes de ser armada? ____________

2. **Para cada uno de los siguientes casos planteen un problema que involucre las expresiones indicadas:**

   $y(y + 3) = 270$ Problema: ____________
   Solución: ____________

   $m^2 - 5 = 220$ Problema: ____________
   Solución: ____________

   $x^2 - x = 306$ Problema: ____________
   Solución: ____________

   a) Intercambien los problemas con otros equipos y verifiquen la solución de los que ustedes reciban.
   b) ¿Hubo diferencias en las respuestas? ¿Por qué? ____________

¡Hazlo tú mismo!

1. **Resuelve de manera individual los siguientes problemas:**

   a) El cuadrado de un número menos el doble del mismo número es 360. ¿De qué número se trata? ____________
   b) El producto de dos números consecutivos es 90. ¿De cuáles números se trata? ____________
   c) El cuadrado de un número menos 10 es igual a 431. ¿De qué número se trata? ____________
   d) El largo de un rectángulo mide seis unidades más que el ancho y el área es 315 m². ¿Cuáles dimensiones tiene el rectángulo? ____________
   e) El producto de dos números es 1 010 000; uno resulta diez unidades mayor que el otro. ¿De cuáles números se trata? ____________
   f) Rosario es tres años mayor que su hermano Pepe. Si el producto de las edades es 990, ¿qué edad tiene cada quien? ____________

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan las preguntas en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Lección 2

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Figuras y cuerpos.
Contenido: Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

Las historietas

La historieta, o cómic, es una serie de dibujos que constituyen un relato. Su origen se remonta a la Antigüedad y la Edad Media, a partir de las primeras pinturas murales egipcias y griegas, y los códices precolombinos, entre otras representaciones gráficas. La invención de la imprenta le dio fuerte impulso, pero hasta la mitad del siglo XIX no se asoció su presencia en algunos periódicos, principalmente en Estados Unidos de América y Europa. Se forma principalmente por figuras y personajes.

En esta lección analizarás las propiedades de figuras congruentes o semejantes.

Punto de partida

1. Manolo es un dibujante que debe reproducir el bosquejo del dibujo original en cada una de las cuadrículas que se muestran. El proceso que debe seguir consiste en reproducir fielmente cada cuadro del original en el correspondiente de los bosquejos 1 o 2. Por ejemplo, el cuadro G6 del original se ha reproducido en el cuadro G6 del bosquejo 1 y en el G6 del 2, como se muestra a continuación (figura 2.1):

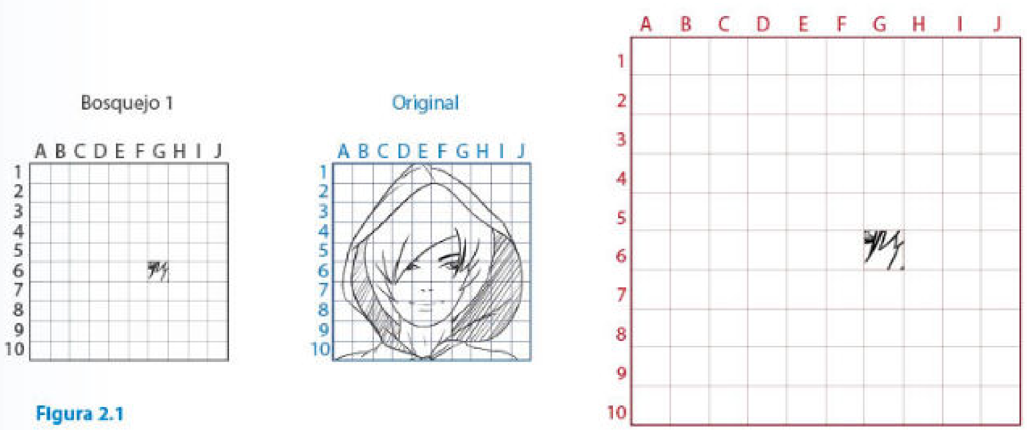


Figura 2.1

En contexto

El cómic ha jugado un papel importante como un medio alfabetizador y formador de lectores. Desde los años 40, ha representado un material popular para la práctica de la lectura que realizan los jóvenes. ¿Tú qué cómics lees? ¿Qué cómics leyeron tus padres o tíos? ¿Qué relación hay entre los cómics y las matemáticas?
Fuente: http://132.248.242.3/~publica/archivos/libros/lectura_mundo_jovenes.pdf#page=239
(Consulta: 24 de enero de 2017)

2. Termina de dibujar los bosquejos 1 y 2.

a) Si sobrepones el bosquejo 1 en el original, ¿cómo son las figuras entre sí? ______
¿Por qué? ______

b) Si sobrepones el bosquejo 2 en el original, ¿cómo son las figuras entre sí? ______
¿Por qué? ______

c) ¿Cómo son entre sí los tres dibujos? ______

d) Con la guía del profesor, comenten las respuestas con el resto del grupo.

Aprendemos

En equipo

Reúnanse en equipos y resuelvan los siguientes problemas:

1. Observen los triángulos de la figura 2.2:

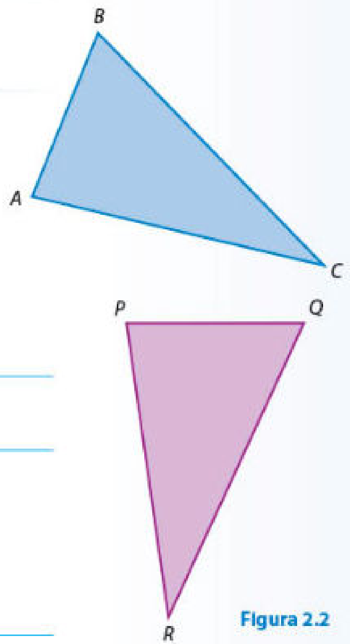


Figura 2.2

a) Calculen las longitudes de cada uno de los lados.
b) Midan con un transportador las magnitudes de los ángulos.
c) ¿Cómo son entre sí los lados de los triángulos? ______
d) ¿Cómo son entre sí los ángulos de los triángulos? ______
e) Obtengan los siguientes cocientes:

$\frac{AB}{PQ} =$ ______ $\frac{BC}{QR} =$ ______ $\frac{CA}{RP} =$ ______

f) ¿Qué relación hay entre estos cocientes? ______

2. Analicen los triángulos de la figura 2.3:

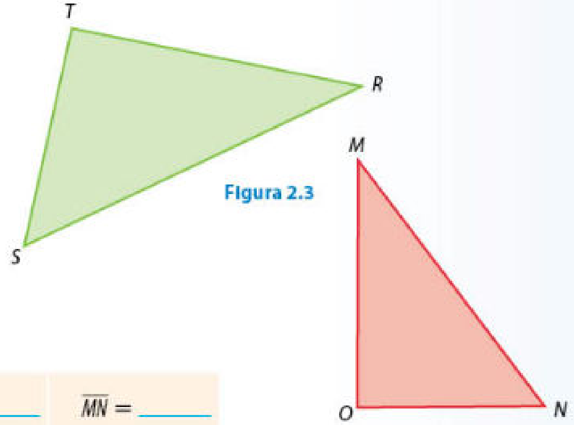


Figura 2.3

a) Calculen la longitud de los lados y la magnitud de cada ángulo.
b) ¿Cómo son entre sí los ángulos del triángulo *MON* con los del *RTS*? ______
c) ¿Puede establecerse una correspondencia entre los lados del triángulo *MON* y los del *RTS* a partir de la medida de los ángulos respectivos? ______
¿Por qué? ______
d) Completen la tabla:

Triángulo *MON*	$\overline{MO} =$ ______	$\overline{NO} =$ ______	$\overline{MN} =$ ______
Triángulo *RTS*	$\overline{RT} =$ ______	$\overline{ST} =$ ______	$\overline{RS} =$ ______
Cocientes	$\frac{\overline{RT}}{\overline{MO}} =$ ______	$\frac{\overline{ST}}{\overline{NO}} =$ ______	$\frac{\overline{RT}}{\overline{MO}} =$ ______

e) ¿Cómo son entre sí los lados de ambos triángulos? ______. Justifica matemáticamente la respuesta: ______

3. Escriban en el cuaderno una conclusión grupal sobre lo que significa el cociente entre los lados de dos triángulos en los siguientes dos casos:

a) Cuando el cociente es igual a 1. *b)* Cuando el cociente es distinto de 1.

TIC y más

Puedes explorar más sobre la semejanza de triángulos en http://www.dmae.upct.es/~pepemar/triangulo/semejanza.html
(Consulta: 13 de enero de 2017)
En el interactivo podrás manipular los vértices de los triángulos respectivos y explorar el efecto sobre el cociente de las longitudes de sus lados homólogos.

Individual

1. **Analiza el cuadrilátero de la figura 2.4.**

Figura 2.4

a) ¿Cuál sería el perímetro de otro cuadrilátero congruente con el *ABCD*? ____________
¿Por qué? ____________

b) ¿Es posible que otro cuadrilátero congruente con *ABCD* tenga distintas medidas en sus lados? ____________
¿Por qué? ____________

c) ¿Cómo deben ser los ángulos interiores de otro cuadrilátero congruente con él? ____________

d) Si se construye un cuadrilátero semejante a éste, ¿qué propiedades se conservan? ____________. Justifica matemáticamente la respuesta.

e) Completa la tabla suponiendo que las dimensiones de otro cuadrilátero *A′B′C′D′* son el doble del dado *ABCD*.

Cuadrilátero *ABCD*	$AB =$ ____	$BD =$ ____	$DC =$ ____	$CA =$ ____
Cuadrilátero *A′B′C′D′*	$A'B' =$ ____	$B'D' =$ ____	$D'C' =$ ____	$C'A' =$ ____
Cocientes	$\frac{A'B'}{AB} =$ ____	$\frac{B'D'}{BD} =$ ____	$\frac{D'C'}{DC} =$ ____	$\frac{C'A'}{CA} =$ ____

e) ¿Qué relación hay entre los lados de los cuadriláteros? ____________

f) ¿Qué tipo de cuadrilátero es *ABCD*? ____________
¿Por qué? ____________

g) ¿Qué tipo de cuadrilátero es *A′B′C′D′*? ____________
¿Por qué? ____________

En equipo

1. **Una propaganda se ha diseñado en una hoja cuyas dimensiones son 4 cm de ancho y 12 de largo. Para imprimirla a manera de volantes se aumentó el ancho a 9 cm, como se muestra en la figura 2.5:**

¡Qué curioso!

Algunos escultores como Ron Mueck recurren a esculturas gigantes que guardan proporcionalidad con figuras humanas.

Si se construyera una escultura al doble de tu tamaño, ¿cuánto mediría de alto? ______ ¿Cuál sería el largo de un brazo? ______. Si fuera del mismo material que tú, ¿cuánto pesaría? ______. Tal vez tengas que reflexionar un poco más sobre tu última respuesta…

Acuérdate de…

Una relación de proporcionalidad es la igualdad de dos razones. La hay por ejemplo en la serie 2, 6, 4 y 12 porque

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$$

a) ¿Cuánto debe medir el largo? ____________

b) Describan el procedimiento usado para determinar el valor de *x*. ____________
¿Es el mismo que utilizaron los otros equipos? ____________

c) Si se decide ampliar el ancho para que sea igual al de una hoja tamaño carta, ¿el largo de ésta bastará para contener la propaganda? ____________
¿Por qué? ____________

Figura 2.5

2. **El *tangrama de Fletcher*, como se muestra en la figura 2.6, se ha empezado a reproducir de manera que sus piezas son proporcionales.**

Figura 2.6

a) ¿Cuánto vale la razón de proporcionalidad? ____________

b) ¿Qué argumento matemático permite construir las piezas de manera que éstas sean semejantes a las originales? Expliquen. ____________

c) En el cuaderno reproduzcan el *tangrama de Fletcher* de manera que las dimensiones de cada pieza sean tres veces la original.

d) Comparen su construcción con las de otros equipos. ¿Son semejantes? ____________ Justifiquen matemáticamente la respuesta. ____________

e) ¿Los tangramas de los equipos son congruentes entre sí? ____________
¿Por qué? ____________

3. **Los hexágonos de la figura 2.7 son semejantes.**

a) ¿Qué argumento matemático permite asegurar que son semejantes? ____________

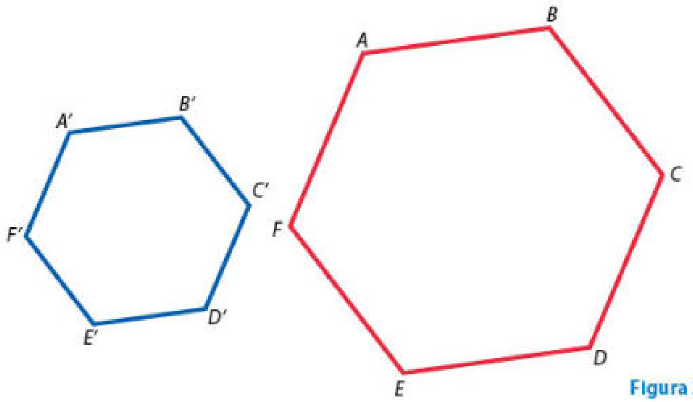


Figura 2.7

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan las preguntas en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

b) ¿Cuánto vale el factor de proporcionalidad? ______________________

c) ¿Cuánto es el cociente $\frac{A'B'}{AB}$? __________ ¿Con cuáles otros cocientes se obtendrá el mismo resultado? __________ ¿Por qué? ______________________

d) Reproduzcan fielmente en el cuaderno la figura 2.7. Tracen una recta que pase por *A* y *A'*, y otra por *E* y *E'*. ¿Qué sucede con ambas rectas?

____

e) ¿Qué sucede con las rectas que pasan por los vértices del triángulo azul y sus correspondientes vértices homólogos del triángulo rojo?

____

f) Compartan sus respuestas con el resto de los equipos. En una lluvia de ideas comenten las propiedades de las rectas que trazaron.

¡Ya lo aprendimos!

Dos figuras geométricas son *semejantes* cuando tienen los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, de manera que la razón entre éstos es la misma que el factor de proporcionalidad. Con factor de proporcionalidad 1, las figuras resultan congruentes.

Por ejemplo, dos cuadrados siempre serán semejantes, pues los lados de uno tendrán sus correspondientes lados homólogos del otro y la razón entre ellos será el cociente de las magnitudes de los lados.

Glosario

factor de proporcionalidad: es un parámetro que indica la proporción en que están relacionadas dos figuras semejantes. Su símbolo es la letra *k*. Por tanto, $k = 2$ significa que las dimensiones de una figura son el doble de las correspondientes a la otra.

¡Hazlo tú mismo!

Resuelve de manera individual el problema siguiente:

El rectángulo intruso

En la figura 2.8 se muestran los modelos matemáticos para cinco marcos rectangulares de fotografías. Se pretende que los marcos sean semejantes entre sí, pero al parecer hay un intruso.

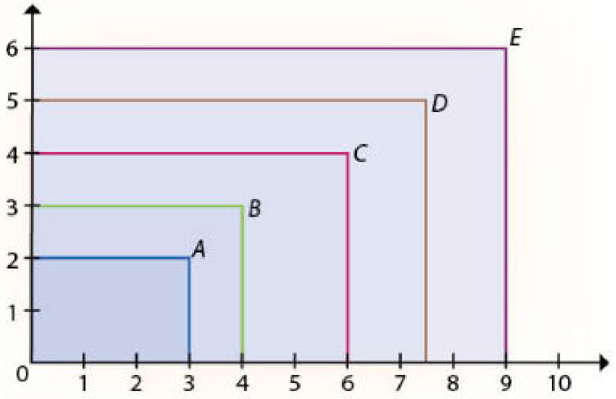


Figura 2.8

a) A simple vista, ¿cuál es el marco intruso? ______________________
¿Por qué? ______________________

b) ¿Qué argumento matemático permite demostrar la semejanza entre los marcos?

____

c) Traza una recta que pase por los puntos *O* y *E*. ¿Qué propiedades tiene ésta?

____

d) ¿Esta recta permite justificar tu respuesta del inciso a? ______________________
¿Cómo? ______________________

Completa la siguiente oración:

En el problema inicial de la página 18, el bosquejo 1 y la original corresponden a figuras __________. Mientras que el bosquejo 2 y la figura original son __________. Pero también se puede justificar que el bosquejo 1 y el 2 son __________ porque __________.

Se ha empezado a construir un polígono semejante al pentágono *PQRST*. Los dos primeros vértices son *P'* y *Q'*, como se muestra en la figura 2.9:

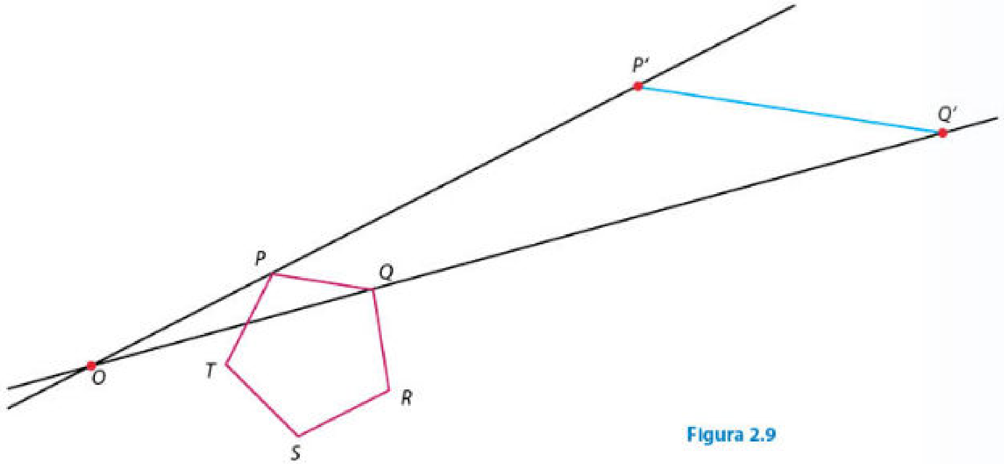


Figura 2.9

a) Termina de construir el polígono *P'Q'R'S'T'*.

b) ¿Cuál es el factor de proporcionalidad? ______________________

c) ¿Cómo son entre sí los ángulos *PQR* y *P'Q'R'*? __________ ¿Sucede lo mismo con los demás ángulos homólogos? __________
¿Por qué? ______________________

d) ¿Cuánto es el cociente $\frac{O'P'}{OP}$? __________ ¿Y el cociente $\frac{O'Q'}{OQ}$? __________

En una lluvia de ideas comenten con el grupo sus respuestas.

a) En caso de que hubiere distintas respuestas para un mismo problema, argumenten matemáticamente su resultado. Consensúen los resultados.

Con la guía del profesor:

b) Describan las propiedades de figuras congruentes entre sí.

c) Describan las propiedades de dos figuras semejantes entre sí.

Lección 3

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Figuras y cuerpos.
Contenido: Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Triángulos congruentes y triángulos semejantes

Una de las figuras geométricas más usadas en las civilizaciones se relaciona con triángulos: ello puede verse en grandes construcciones, como las pirámides de Egipto o hasta el museo de Louvre, en Francia.

En arquitectura moderna, por ejemplo, se emplea el sistema mero: a partir de un triángulo con tres barras y tres globos enlazados se realizan combinaciones para obtener estructuras más complejas.

Otra estructura interesante es la tridilosa: inventada por el científico mexicano Heberto Castillo Martínez; reemplaza trabes y lozas completas, lo cual permite un considerable ahorro de concreto y acero. Algunas construcciones que usan este sistema son el Centro Médico Siglo XXI, en la capital del país, y el edificio Biosfera 2, en Estados Unidos de América (figura 3.1).

Figura 3.1 Instalaciones de Biosfera 2, en Arizona, Estados Unidos.

Punto de partida

La pirámide del museo de Louvre se erigió en el centro de una construcción geométrica, como se muestra en la vista aérea de la figura 3.2:

a) ¿Qué tipo de triángulos forman esta estructura geométrica? ______

b) ¿Cómo son entre sí los triángulos 1 y 2? ______ ¿Cómo puedes argumentar esta respuesta? ______

c) ¿Cómo son entre sí los triángulos 5 y 7? ______ ¿Por qué? ______

______

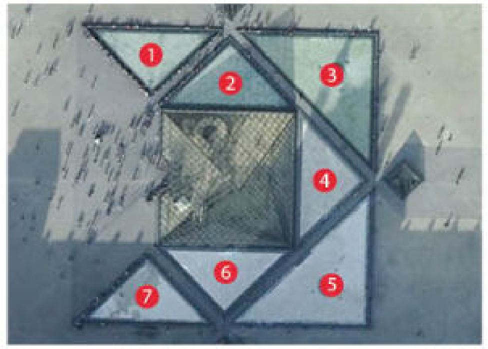


Figura 3.2

Aprendemos

En equipo

Reúnanse en equipos para resolver los siguientes problemas:

1. **Mariana quiere usar pinceles para construir triángulos de distintas medidas, como los mostrados en la figura 3.3, en el primero utilizó tres y en el segundo cinco:**

a) ¿Podrá formar un triángulo con cuatro pinceles? ______
¿Por qué? ______

b) ¿Podría con cinco pinceles formar un triángulo distinto al de la figura 3.3? ______
Por qué? ______

c) ¿Cuántos triángulos distintos podrá formar con sólo seis pinceles? ______

d) Completen la información de la siguiente tabla:

Pinceles	Triángulos que pueden formarse	Medidas de los lados
3	1	1-1-1
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Figura 3.3

2. **Analicen la información de la tabla para contestar lo siguiente:**

a) ¿Hay un triángulo cuyas medidas sean 2-4-6? ______
¿Por qué? ______

b) ¿Cuántos triángulos distintos hay cuyo perímetro sea de 15 pinceles? ______
Expliquen la respuesta. ______

c) Compartan los resultados con otros equipos.

En grupo

1. **En grupo, y con la guía del profesor, determinen la condición que posibilite construir un triángulo con un número determinado de pinceles.**

a) Con base en esta conclusión, muestren seis ejemplos: tres donde sea posible construir el triángulo y tres donde no.

b) Dibujen en el cuaderno los tres primeros ejemplos del inciso *a*.

¡Qué curioso!

La tridilosa está constituida por secciones con cuatro triángulos iguales entre sí, unidos con un cuadrado, como pirámides invertidas.

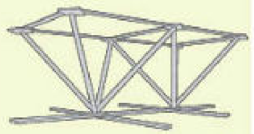


Figura 3.4

En contexto

La tridilosa, cuya base geométrica son los triángulos congruentes, tiene múltiples aplicaciones. Una de las que ha tomado relevancia internacional es en la construcción de puentes. En el siguiente link encontrarás una entrevista a Heberto Castillo, ingeniero mexicano que la inventó: http://www.revistaciencias.unam.mx/en/55-revistas/revista-ciencias-80/394-a0807.html (Consulta: 13 de enero de 2017)

En equipo

1. **Lancen tres dados y registren los resultados cuyos números permitan construir triángulos, como hizo Mariana en la sección Aprendemos.**
   a) ¿Cuáles triángulos pueden construirse? ______________.
   b) Escriban algún ejemplo de cierto resultado que no permita construir triángulo.
   ______________ ¿Por qué? ______________

2. **Discutan sobre la factibilidad de construir el triángulo *ABC* indicado en cada caso. Si es posible, dibújenlo en el cuaderno.**
   a) $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{AC} = 1$
   b) $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{AC} = 8$
   c) $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 2$, $\overline{AC} = 11$
   d) $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{AC} = 5$
   e) $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{AC} = 8$

3. **Arturo ha diseñado un triángulo cuyo perímetro es 13 unidades. Sofía, sin ver aquel trazo, decide hacer uno con igual contorno.**
   a) ¿El triángulo de Sofía será congruente con el de Arturo? ______________
   ¿Por qué? ______________
   b) ¿Es suficiente saber el perímetro para generar un triángulo congruente con otro dado?
   ____
   ¿Por qué? ______________
   c) ¿Qué necesita saber Sofía para construir un triángulo idéntico al de Arturo?
   ____

4. **Cada integrante del equipo dibuje con el juego de geometría un triángulo cuyos lados midan 15, 12 y 16 cm, sin importar el orden en que tomen las medidas.**
   a) Recorten el triángulo y compárenlo con los de los integrantes del equipo. ¿Cómo son las figuras entre sí? ______________
   ¿Por qué sucede esto? ______________
   b) Si hubiere algún triángulo distinto, expliquen matemáticamente por qué es diferente.
   c) Con esas medidas, ¿es posible obtener un triángulo distinto al de los presentados en el equipo? ______________
   ¿Por qué? ______________
   d) ¿Cómo serán los triángulos obtenidos por el equipo respecto a los de otros?
   ____
   Argumenten matemáticamente la respuesta. ______________

5. **En el equipo analicen y contesten la siguiente pregunta:**
   ¿Es suficiente saber las medidas de los tres lados para obtener triángulos iguales? ______
   Argumenten matemáticamente la respuesta. ______________
   ____

¡Ya lo aprendimos!

Si en dos triángulos, los tres lados de uno son respectivamente iguales con los del otro, entonces ambas figuras resultan congruentes entre sí. El criterio se llama "Lado-Lado-Lado" (*LLL*) y permite justificar la congruencia de dos triángulos.

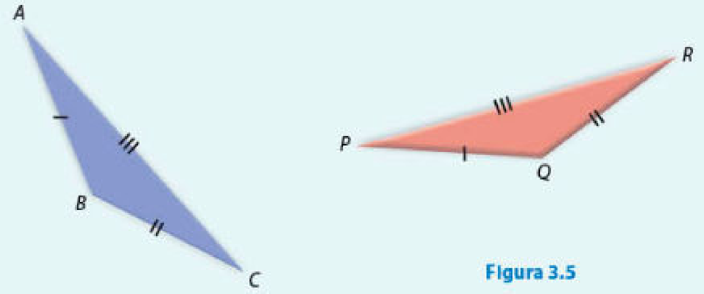


Figura 3.5

Por ejemplo, si se cumple que para el triángulo *ABC* y el triángulo *PQR*

$\overline{AB} = \overline{PQ}$ $\overline{BC} = \overline{QR}$ $\overline{AC} = \overline{PR}$

Entonces los triángulos son congruentes, iguales en forma y tamaño.

Esta relación se escribe: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, lo cual determina la existente entre sus elementos. De manera visual se establece con el trazado de una marca igual en los lados homólogos.

6. **Adriana es diseñadora y platica telefónicamente con Graciela sobre un bosquejo en el que trabaja. Dice: "En el fondo del cartel hay dos segmentos de 20 cm y otro de 30 cm; están unidos por un extremo, de manera que entre ellos se forma un ángulo de 80°. Creo que así obtendré un buen marco triangular para mi diseño." A Graciela le gustó la idea y quiere replicarla.**
   a) Con esos datos, ¿obtendrá Graciela el mismo triángulo que Adriana? ______________
   b) Dibujen en el cuaderno el triángulo.
   c) Comparen los dibujos obtenidos. ¿Algún integrante del equipo trazó uno distinto? ______ ¿Por qué? ______________
   d) Con esta información, ¿es posible dibujar triángulos distintos? ______________
   Argumenten matemáticamente la respuesta. ______________
   ____

En grupo

1. **Con la guía del profesor propongan la longitud de dos segmentos con un extremo común y la magnitud de un ángulo (preferentemente agudo) que se forme entre ellos.**
   a) Dibuje cada quien el triángulo que podría formarse con estos datos.
   b) ¿Qué sucedió? ______________

c) Con estos datos, ¿es posible obtener más de un triángulo? ____________
¿Por qué? ____________

2. Analicen y contesten la siguiente pregunta:

¿Basta saber las medidas de dos lados y el ángulo formado entre ellos para obtener triángulos iguales? ________ Argumenten matemáticamente la respuesta. ________

____

¡Ya lo aprendimos!

Si en dos triángulos, un par de lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales a los del otro, entonces ambas figuras resultan congruentes.

Este criterio se llama "Lado-Ángulo-Lado" (*LAL*). En la figura 3.6 $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

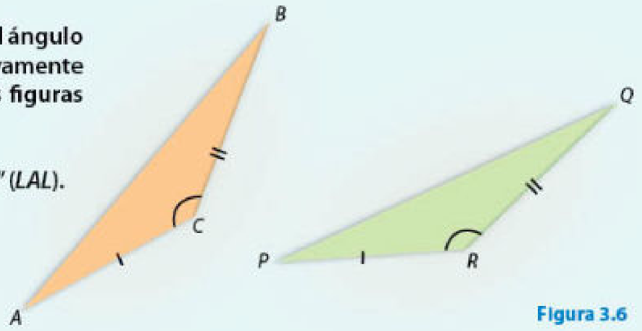


Figura 3.6

En equipo

1. Lux y Albor son dos empresas de espectáculos de luz y tienen la encomienda de colocar, en la misma presentación pero de manera independiente, dos reflectores separados entre sí por 16 m e inclinados a 50° y 40°, respectivamente (figura 3.7).

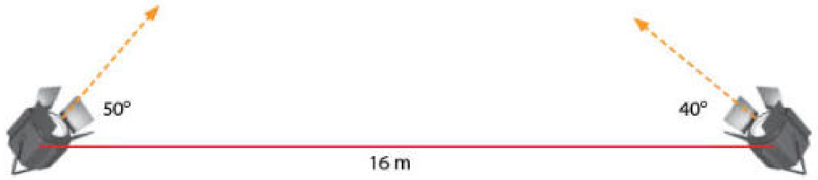


Figura 3.7

a) ¿Cuánto medirá el ángulo de intersección de los rayos de luz de los reflectores de la empresa Lux, que colocó los reflectores como se muestra en la figura 3.7?

____

b) En el cuaderno dibujen a escala 1:100 (1 cm = 1 m) el modelo geométrico que representa esta situación. Encuentren la intersección de los rayos de luz.

c) ¿Cuánto miden los lados del triángulo obtenido? ____________

d) Comparen a contraluz los dibujos obtenidos. ¿Qué sucedió? ____________
Expliquen matemáticamente el resultado. ____________

____

2. La empresa Albor colocó el reflector izquierdo con un ángulo de 40° y el derecho con 50°.

a) ¿Cuánto mide el ángulo en la intersección de los rayos de luz? ____________
¿Por qué? ____________

b) Dibujen en el cuaderno el modelo geométrico. Compárenlo con el trazo anterior. ¿Son distintos? ______ ¿Por qué? ____________

____

¡Ya lo aprendimos!

Si en dos triángulos, un par de ángulos y el lado comprendido entre ellos son respectivamente iguales a los del otro, entonces ambas figuras resultan congruentes.

Este criterio se llama "Ángulo-Lado-Ángulo" (*ALA*). En la figura 3.8, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

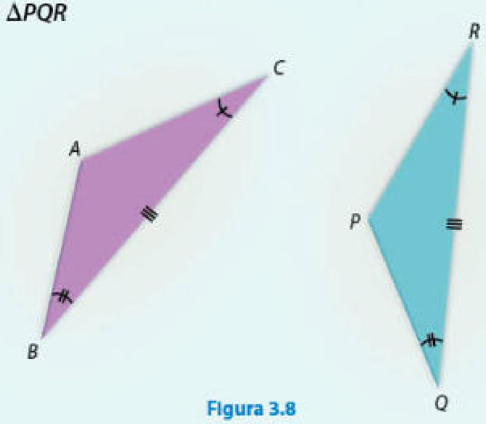


Figura 3.8

3. En una hoja blanca dibujen por separado un triángulo cuyos ángulos sean iguales.

a) Comparen los triángulos obtenidos en los equipos. ¿Son congruentes? ________
¿A qué se debe el resultado? ____________

____

b) Tomen el triángulo menor obtenido en el equipo y el mayor. ¿Cómo son entre sí?
________ ¿Por qué? ____________

____

c) Del triángulo pequeño nombren los vértices como *A*, *B* y *C*; los del mayor, como *A'*, *B'* y *C'*, de acuerdo con el vértice que les corresponde en el primero.

d) ¿Qué se obtiene al dividir la longitud del lado *A'B'* entre la longitud del *AB*? ________
¿Y al dividir *B'C'* entre *BC*? ________ ¿Y *A'C'* entre *AC*? ________

e) ¿Por qué se obtiene este resultado? ____________

____

TIC y más

Para complementar las ideas estudiadas en la lección, te proponemos visitar el sitio http://www.portaleducativo.net/segundo-medio/41/criterios-de-semejanza-triangulos (Consulta: 24 de enero de 2017)
Comenta con los compañeros los aspectos del sitio web que han sido explorados en las actividades de esta lección.

Acuérdate de...

Una razón es el cociente entre dos cantidades. Por ejemplo, al medir la longitud de tu brazo y de tu mano, la razón entre ambos puede expresarse como el cociente de los dos datos.
¿Cuál es la razón de tu estatura y la longitud de tu ombligo al piso? ____________

4. Comparen el triángulo menor de su equipo con el mayor de otro.

a) Nombren el triángulo pequeño como PQR y el grande como $P'Q'R'$.

b) ¿Qué se obtiene al dividir la longitud del lado $P'Q'$ entre la longitud del AB? ________ ¿Y al dividir $Q'R'$ entre BC? ________ ¿Y $P'R'$ entre AC? ________

c) ¿Por qué se obtiene este resultado? ____________

d) ¿Cuál es la razón entre el perímetro del mayor y del menor? ____________

5. Analicen los resultados de las actividades 1 y 2. Con la guía del profesor describan la relación que hay entre los triángulos obtenidos. ¿Cómo son entre sí?

____

¡Ya lo aprendimos!

Dos triángulos pueden ser congruentes, semejantes o totalmente distintos entre sí.

Es posible determinar la congruencia de dos triángulos mediante tres criterios:

- ***LLL***
- ***LAL***
- ***ALA***

Por otra parte, dos triángulos son semejantes si muestran ángulos iguales y lados proporcionales.

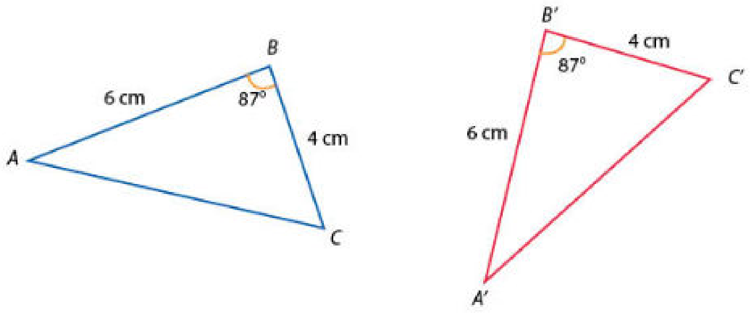
¡Hazlo tú mismo!

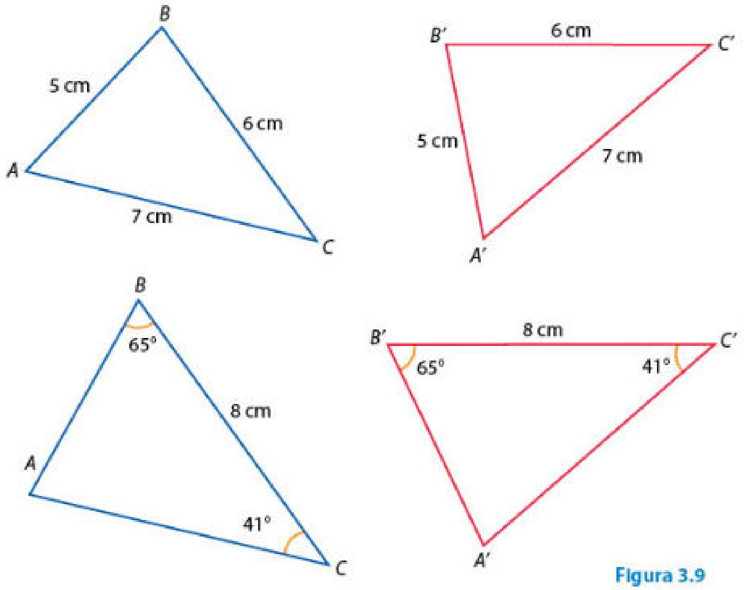
1. La razón entre los perímetros de dos cuadrados es 1. ¿Qué características deben tener estos cuadrados?

____

2. Analiza cada pareja de triángulos de la figura 3.9. Si son congruentes, argumenta qué criterio lo justifica.

¿Son congruentes? ________
¿Por qué? ________





¿Son congruentes? ________
¿Por qué? ________

¿Son congruentes? ________
¿Por qué? ________

Figura 3.9

3. Analiza de nuevo el problema de la sección Punto de partida.

a) ¿Qué argumento matemático permite establecer la relación de semejanza o congruencia entre los triángulos 1 y 2? ________
¿Por qué? ________

b) ¿Cómo son entre sí los triángulos 5 y 7? ________
¿Por qué? ________

4. Para cierta exposición se construyó un triángulo como el de la figura 3.10.

a) ¿Cuánto miden los otros dos lados? ________ y ________

b) Justifiquen matemáticamente el resultado. ________

c) Sólo con centímetros, ¿cuál es la razón entre las medidas reales del triángulo y las que pueden medirse sobre el de la figura 3.10?

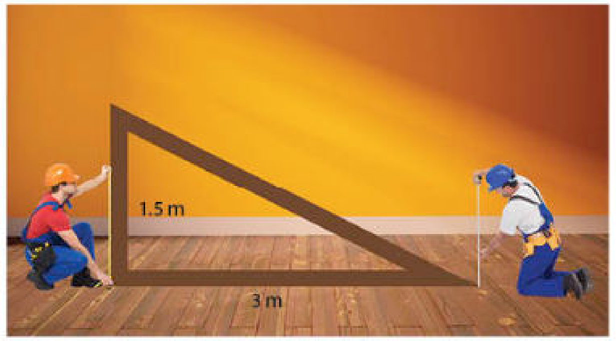


Figura 3.10

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan las preguntas en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Lección 4

Eje: Manejo de la información.
Tema: Proporcionalidad y funciones.
Contenido: Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

El mejor trabajo

Las últimas décadas se han caracterizado por la producción de grandes cantidades de información de todo tipo, que compartimos y consultamos en diversos medios, como televisión, revistas, telefonía móvil e internet. Por ello la encontramos en diferentes formatos: texto, gráficas, tablas de datos, imágenes, video, audio u otros. Saber matemáticas ayuda a comprender mucha de esa información y tomar así mejores decisiones.

En esta lección resolverás problemas donde hay que identificar la situación correspondiente a una relación de proporcionalidad, a partir del análisis de tablas de datos, gráficas y expresiones algebraicas.

¡Qué curioso!

Varios historiadores aseguran que el chocolate tiene su origen en México. Se sabe que los aztecas consumían una bebida preparada con cacao tostado, agua, miel y harina de maíz; la llamaban *xocolatl*, vocablo náhuatl compuesto por *xococ* (agrio) y *atl* (agua).

Actualmente, Tabasco y Chiapas aportan más de 90% de la producción de cacao en México, y la complementan Oaxaca, Guerrero y Veracruz.

Para conocer más acerca de la historia del cacao y el chocolate mexicano consulta http://www.revista.unam.mx/vol.13/num6/art69/

(Consulta: 13 de enero de 2017)

Punto de partida

Brenda y David leen en un periódico las siguientes opciones de trabajo:

Fábrica de chocolates artesanales Kux'tal

Requiere personal para producción.

Ofrecemos

- Excelente ambiente laboral.
- Pago: $2.00 de comisión por pieza producida, más $200.00 de sueldo base.

Opción de trabajo 1

Excelente oportunidad de trabajo

Dulces y confites El Acitrón

Solicita ayudantes para elaboración de dulces.

Te garantizamos

- Vacaciones.
- Pago: $3.00 de comisión por pieza producida.

Opción de trabajo 2

a) ¿Cuál opción de trabajo ofrece el mejor pago? __________

b) Justifica tu respuesta. __________

Comparte tus respuestas con otros compañeros.

Comenten cuál información consideraron para elegir la opción de trabajo que ofrece el mejor pago.

Aprendemos

Individual

Resuelve en el cuaderno los siguientes problemas:

1. **David eligió la opción de trabajo 1 y desea conocer su pago por producir diferentes cantidades de piezas.**

   a) ¿Cuál será el pago si produce 36 piezas de chocolate?

   b) ¿Cuál será el pago si produce 120 piezas?

   c) ¿Cuántas piezas debe producir para obtener un pago de $256.00?

   d) ¿Qué procedimiento realizaste para calcular el pago en cada caso?

   e) Representa con y el pago en la opción de trabajo 1 y con x la cantidad de piezas producidas. Escribe la expresión algebraica que represente la relación.

2. **Usa la expresión algebraica que obtuviste para calcular el pago en la opción de trabajo 1 y responde:**

   a) ¿Cuál será el pago de David si produce 20 piezas?

   b) ¿Cuál será el pago si produce el doble de piezas?

   c) Si produce el triple de piezas, ¿recibe el triple del pago?

   d) Según estos resultados, ¿la relación entre las piezas producidas y el pago es de proporcionalidad directa?

   e) Explica por qué. __________

3. **Brenda eligió la opción de trabajo 2 y calcula el pago que recibiría por piezas producidas.**

   a) ¿Cuál será el pago si produce 25 piezas?

   b) ¿Cuál será el pago si produce 140 piezas?

   c) ¿Cuántas piezas debe producir para obtener un pago de $228.00?

   d) ¿Qué número se multiplica por la cantidad de piezas producidas?

   e) ¿Qué número hay que sumar para obtener el pago total?

   f) Representa con y el pago en la opción de trabajo 2 y con x la cantidad de piezas producidas. Escribe la expresión algebraica que representa la relación.

En contexto

En años recientes han cobrado importancia los temas de educación financiera y finanzas personales, que pretenden desarrollar en las personas una serie de habilidades orientadas al uso eficiente del dinero, que obtienen como resultado de su trabajo.
Entre otras cosas, la educación financiera ayuda a las familias a organizar los gastos de la casa, a saber cómo ahorrar, o a identificar la información necesaria para la compra de un seguro. Como te darás cuenta, las matemáticas juegan un papel importante en los temas financieros para tomar decisiones informadas.
El Museo Interactivo de Economía (MIDE) ofrece información y actividades relacionadas con estos temas. Visita su portal electrónico en http://www.mide.org.mx/mide/
(Consulta: 13 de enero de 2017)

Acuérdate de...

En una expresión algebraica hay cantidades o números que toman diferentes valores, a los que llamamos **variables**; y otros que no cambian, **constantes**.

Por ejemplo, en la expresión $y = 4x - 3.5$, las cantidades x y y son variables mientras que 4 y 3.5 son constantes.

4. **Usa la expresión algebraica que obtuviste para calcular el pago en la opción de trabajo 2 y responde:**

a) ¿Cuál será el pago de Brenda si produce 15 piezas?

b) Si produce el doble de piezas, ¿recibe el doble del pago?

c) ¿Cuál será el pago si produce el triple de piezas?

d) Usa tus resultados y responde: en la opción de trabajo 2, ¿la relación entre las piezas producidas y el pago es de proporcionalidad directa?

e) Explica por qué.

Compara con otros compañeros los procedimientos que emplearon para calcular el pago y las expresiones algebraicas obtenidas.
Si tienen resultados diferentes, identifiquen por qué y establezcan cuáles son los correctos.

¡Ya lo aprendimos!

Si una relación funcional entre dos cantidades, *x* y *y*, es de proporcionalidad directa, la expresión algebraica que representa dicha relación es de la forma $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Por ejemplo, la expresión $r = 3.4t$ es del tipo $y = kx$; por tanto, la relación entre las cantidades *r* y *t* es de proporcionalidad directa, donde 3.4 es la constante.

La expresión $p = 5q + 8.3$ es de la forma $y = kx + b$, donde k y b son constantes. Estas expresiones no corresponden a relaciones de proporcionalidad directa: son funciones lineales.

5. **Usa la expresión algebraica que escribiste para cada opción de trabajo y completa las tablas 4.1 y 4.2:**

Opción de trabajo 1	
Cantidad de piezas producidas *x*	Pago (pesos) *y*
	200
50	
100	
	500
200	
300	

Tabla 4.1

Opción de trabajo 2	
Cantidad de piezas producidas *x*	Pago (pesos) *y*
0	
	300
150	
200	
250	
	900

Tabla 4.2

Observa los datos registrados en las tablas 4.1 y 4.2, y contesta:

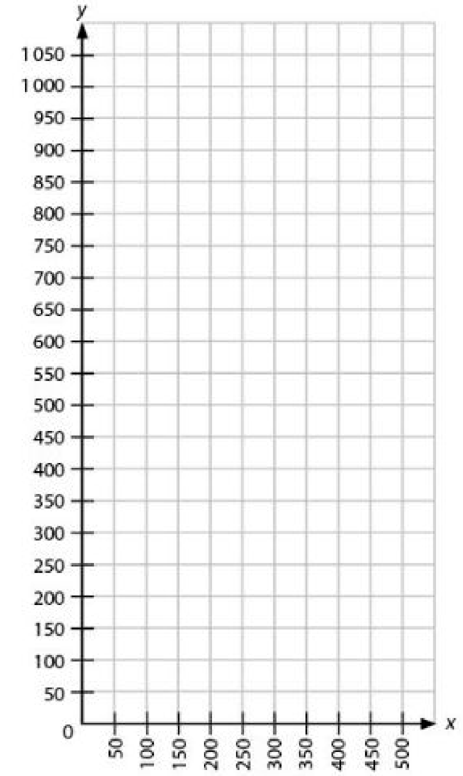
a) Si se producen 100 piezas, ¿en qué opción de trabajo el pago es mayor?

b) Si se producen 300 piezas, ¿en qué opción de trabajo el pago es mayor?

c) ¿Qué puedes concluir a partir de estas respuestas?

6. **Usa los datos de las tablas anteriores y en el plano cartesiano de la figura 4.1 construye con rojo la gráfica correspondiente al pago en la opción de trabajo 1 y con azul la del pago en la opción de trabajo 2.**

Analiza las gráficas que construiste y responde lo siguiente:



Opción de trabajo 1
Opción de trabajo 2

Figura 4.1

a) En la opción de trabajo 1, ¿para qué valores de *x* el pago es mayor?

b) En la opción de trabajo 2, ¿para qué valores de *x* el pago es mayor?

c) ¿En qué punto se intersecan ambas gráficas?

d) ¿Qué significa este punto de intersección de las gráficas?

e) Con base en tus respuestas, explica cuál opción de trabajo es mejor.

7. Analiza las gráficas que construiste y anota una ✔ en las celdas de la tabla 4.3 si la afirmación es cierta para la opción de trabajo correspondiente, y anota una ✗ si no.

	Opción de trabajo 1	Opción de trabajo 2
Su expresión es de la forma $y = kx$.		
Su expresión es de la forma $y = kx + b$.		
La relación entre las variables x y y es de proporcionalidad directa.		✔
La relación entre las variables x y y es una función lineal.		
Su gráfica son puntos que están sobre una recta.		
Su gráfica pasa por el origen de coordenadas.	✗	
Su ordenada al origen es diferente de cero.		

Tabla 4.3

8. De acuerdo con tus respuestas de la tabla anterior, responde lo siguiente:

a) ¿Cómo es la gráfica de una relación de proporcionalidad directa?

b) ¿Cómo es la gráfica de una función lineal?

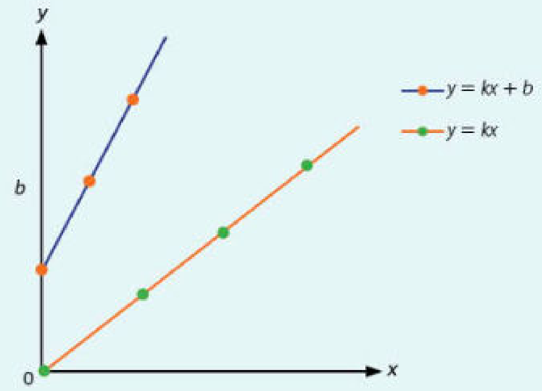
¡Ya lo aprendimos!

La gráfica asociada a una relación de proporcionalidad directa de la forma $y = kx$, cumple las siguientes propiedades:

a) **Sus puntos están sobre una recta.**

b) **Uno de sus puntos coincide con el origen de coordenadas (0, 0).**

La gráfica asociada a una funcional lineal de la forma $y = kx + b$ son puntos que están sobre una recta, donde b es la ordenada al origen; esto es, el valor que corresponde a y cuando $x = 0$.



¡Hazlo tú mismo!

1. Dos autos viajan con velocidad constante y recorren una distancia d (en metros) durante un tiempo t (en segundos), respectivamente. El trayecto del auto A está representado por la expresión algebraica $d = 3t$; el del B, por $d = t + 6$.

a) Calcula la distancia que recorrerá cada auto para los siguientes tiempos: t = 0, 1, 2, 5, 8, 10, 12 y 15 segundos. (Sugerencia: construye una tabla de datos si lo crees necesario).

b) ¿Cada expresión algebraica representa una relación funcional?

Explica por qué.

c) Construye en el cuaderno la gráfica que represente la relación entre la distancia y el tiempo de recorrido de los autos A y B, respectivamente.

d) ¿Alguna de las dos situaciones es de proporcionalidad directa?

Explica por qué.

TIC y más

Para resolver más problemas de proporcionalidad y de relación funcional explora el recurso interactivo Relaciones funcionales, en la dirección electrónica http://matematica1.com/matematicas-iii-telesecundaria-mexico-ejercicios-libro-pdf/
(Consulta: 24 de enero de 2017)

Lección 5

Eje: Manejo de la información.
Tema: Proporcionalidad y funciones.
Contenido: Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Láminas cuadradas

Las matemáticas tienen diversos usos y aplicaciones; entre ellos, *modelar* procesos o fenómenos naturales y sociales. En ciencias como física, biología o economía se usan modelos para representar fenómenos de la vida real en lenguaje matemático, lo cual permite estudiarlos sin necesidad de observarlos o reproducirlos. Por ejemplo, ciertos modelos matemáticos ayudan a pronosticar el clima de ciudades y regiones a partir del análisis sobre las variables relacionadas.

En esta lección conocerás las características de relaciones funcionales cuadráticas mediante el modelado de algunos problemas de la vida real y de las ciencias.

Figura 5.1

Punto de partida

Resuelve en el cuaderno lo siguiente:

Una fábrica construye láminas cuadradas de cartón reciclado (figura 5.1), cuyo costo depende del tipo y calidad. Además, si el cliente solicita entrega a domicilio, se cobra un cargo extra.

Las láminas de cartón tipo A tienen un costo de $3.00 por decímetro cuadrado (dm^2).

a) ¿Cuál es el costo de una lámina cuadrada de 7.5 dm por lado?

b) ¿Cuál es el costo de una lámina cuadrada de 12 dm por lado?

c) ¿Cuál es el costo total de dos láminas cuadradas de 20 dm por lado?

d) Explica qué procedimiento realizaste para obtener los costos anteriores.

e) Si el lado de una lámina es el doble de otra, ¿su costo también es el doble?

f) ¿La relación entre el costo y la medida de los lados de las láminas es de proporcionalidad directa?

Justifica la respuesta.

Comparte las respuestas con otros compañeros.

Comenten qué procedimientos realizaron para encontrar las respuestas.

En contexto

Los modelos matemáticos ayudan a reducir, reusar y reciclar, procesos que conforman una propuesta de consumo responsable conocida como las tres erres de la ecología. El reciclaje promueve el ahorro de energía, agua, materias primas y reduce el uso excesivo de recursos naturales de los ecosistemas.
En tu casa, en la escuela y en cualquier lugar ayuda a separar residuos como vidrio, cartón, papel, aluminio, ya que estos desechos son reciclables; si además de esto también consumes productos con el símbolo de reciclaje, ayudarás a que tengamos un mejor ambiente.

Aprendemos

Individual

1. **A continuación se muestran las notas de venta (figura 5.2) de dos clientes que compraron diferentes cantidades de láminas de cartón tipo B, las cuales tienen un costo de $5.50 por decímetro cuadrado.**

Folio: 00117

Nota de venta

Cantidad	Producto	Subtotal
2	Lámina de 10 dm por lado	
3	Lámina de 12 dm por lado	
1	Lámina de 20 dm por lado	
	Costo total	

Gracias por su compra

Cliente 1

Folio: 00118

Nota de venta

Cantidad	Producto	Subtotal
2	Lámina de 18 dm por lado	
1	Lámina de 15 dm por lado	
	Costo total	

Gracias por su compra

Cliente 2

Figura 5.2

a) Completa en las notas de venta el subtotal que cada cliente deberá pagar por la cantidad de láminas correspondiente.

b) Calcula el costo total que cada cliente pagará por su compra y anótalo.

c) ¿Cuál de los clientes deberá pagar una cantidad mayor por su compra?

2. **Representa con y el costo total de las láminas cuadradas de cartón y con x la medida de los lados.**

a) ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas modelan la relación entre estas dos cantidades?

$y = 5.5 \times 2x$ $y = 5.5x^2$
$y = 5.5 + x^2$ $y = 5.5 \times x \times x$

b) ¿Las expresiones algebraicas que elegiste corresponden a funciones lineales?

Justifica la respuesta.

c) Explica qué relación hay entre el costo y las láminas cuadradas en función de la medida de los lados x.

3. **Usa la expresión algebraica que obtuviste y completa la tabla 5.1. Considera un costo de \$5.50 por decímetro cuadrado.**

Lado de la lámina de cartón x (dm)	Costo total de la lámina de cartón y (pesos)
5	
9	
	550
14	
	1 408
19	
	2 200
22	
25	

Tabla 5.1

4. **La fábrica aplica un cargo extra de \$ 140.00 por flete si entrega las láminas de cartón en la misma localidad y \$ 220.00 si se trata de alguna cercana.**

a) Un cliente compra una lámina tipo A de 9.5 dm por lado y otra de tipo B de 12 dm por lado. ¿Cuánto pagará en total si las entregan en una localidad cercana?

b) Otro cliente compra dos láminas tipo B, una de 17 dm por lado y otra de 21 dm por lado. ¿Cuánto pagará en total si las entregan en la misma localidad?

c) Explica cómo calculaste el costo de las láminas en cada caso.

d) Representa con y el costo total de las láminas cuadradas de cartón y con x la medida de los lados. Completa la tabla 5.2 con las expresiones algebraicas de cada relación, según el flete y el tipo de lámina:

	Láminas de cartón tipo A	Láminas de cartón tipo B
Flete en la misma localidad		
Flete en localidades cercanas	$y =$ ____ + ____	

Tabla 5.2

5. **Comparte los resultados con los compañeros.**

Comenten qué características tienen las funciones cuadráticas. Identifiquen las diferencias entre este tipo de funciones y las lineales.

¡Ya lo aprendimos!

En los problemas anteriores empleaste tablas de datos y expresiones algebraicas para modelar la relación entre dos conjuntos de cantidades. Así, la relación funcional entre la medida de los lados de las láminas cuadradas (representada por x) y el costo (representado por y) se modeló algebraicamente por expresiones como $y = 5.5x^2$ y $y = 3x^2 + 140$.

En estas expresiones, una de las variables (x) tiene un exponente 2: está elevada al cuadrado (x^2). Por ello decimos que toda expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + b$, donde a y b son constantes, es una **función cuadrática.**

Observa que $y = ax^2$ es un caso particular de la expresión cuadrática $y = ax^2 + b$, para la cual $b = 0$. De acuerdo con esto, $y = 2x^2 + 15$ y $p = \frac{1}{2}q^2$ son ejemplos de funciones cuadráticas.

Individual

1. **Como parte de una prueba, dos pilotos recorrerán con sus autos una pista recta de 400 metros, e iniciarán el movimiento al mismo tiempo. El auto A puede alcanzar una aceleración constante de 3 m/s² y el B de 5 m/s² por ello deciden que el auto A inicie su recorrido 100 metros más adelante que el auto B, como se aprecia en la figura 5.3.**

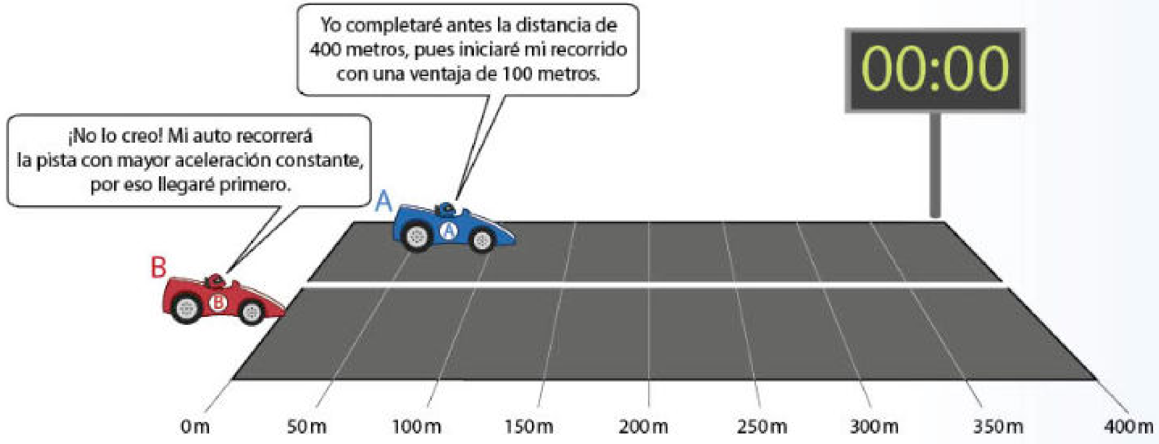


Figura 5.3

a) ¿Cuál de los dos pilotos está en lo correcto?

b) Explica por qué.

2. **Conforme con las ecuaciones de la cinemática, la relación entre la distancia d (en metros) y el tiempo t (en segundos) de un móvil que se desplaza con aceleración constante a (en $\frac{m}{s^2}$), está dada por la expresión $d = v_i t + \frac{1}{2}at^2$, donde v_i es la velocidad inicial (en $\frac{m}{s^2}$).**

a) Usa la información anterior y escribe las expresiones que modelan la relación de la distancia recorrida y el tiempo para cada auto. Considera que ambos inician el movimiento a partir del reposo.

Auto A: ____________ Auto B: ____________

b) Aplica las expresiones algebraicas obtenidas y completa la tabla 5.3:

	Auto A	Auto B
Tiempo t (s)	**Distancia d (m)**	**Distancia d (m)**
0		
1		
2		10
4	24	
5		
7		122.5
8	96	
10		
11		

Tabla 5.3

c) Analiza los datos obtenidos en la tabla 5.3 y contesta lo siguiente:

- ¿Cuál auto completó primero el recorrido? ____________
- ¿En qué tiempo los autos coinciden en la misma distancia del recorrido? ____________
- Si el recorrido se extendiese a 400 metros, ¿cuál auto llegaría primero? ____________

Compara con otros compañeros los procedimientos empleados para obtener las expresiones algebraicas y completar la tabla.

Acuérdate de...

Decimos que un móvil desacelera cuando éste frena y la magnitud de la velocidad disminuye. Si representamos este movimiento en un diagrama, veremos que el vector de aceleración tiene un sentido contrario al de desplazamiento. Es decir, la desaceleración significa que el móvil se desplaza con una aceleración negativa.

3. **En otra pista, el piloto del auto C ejecuta una prueba de distancia de frenado. Se desplaza con una velocidad inicial de 40 $\frac{m}{s}$ y al pasar por una señal, pisa el freno; el auto desacelera a razón de 4 $\frac{m}{s}$. En ese instante se activa un cronómetro y se registra la distancia que recorre hasta detenerse por completo.**

La relación entre la distancia d que recorre el auto antes de detenerse y el tiempo t que tarda en hacerlo está dada por la expresión $d = 200 - v_i t + \frac{1}{2}at^2$, donde v_i es velocidad inicial y a aceleración.

a) Usa los datos anteriores y obtén la expresión que describa la relación entre la distancia recorrida y el tiempo de frenado del auto C:

____

b) Completa la tabla 5.4.

Auto C	
Tiempo t (s)	**Distancia de frenado d (m)**
0	
1	
2	128
5	
6	32
8	
10	

Tabla 5.4

c) ¿En qué tiempo el auto C frena por completo? ____________

d) ¿Qué distancia recorre durante la prueba de frenado? ____________

¡Ya lo aprendimos!

En el último problema resolviste que la relación funcional entre la distancia de frenado $d(m)$ y el tiempo $t(s)$ se modeló por la expresión $d = 200 - 40t + \frac{1}{2}4t^2$, que puede reescribirse como $d = \frac{1}{2}4t^2 - 40t + 200$.

Esta expresión supone un caso particular de la forma general de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes. El número a es el coeficiente del término cuadrático; el b, es el del término de grado uno; y el c, el coeficiente del término de grado cero, también es llamado "término independiente".

¡Hazlo tú mismo!

Una tienda de materiales para la construcción vende ventanas cuadradas con marco. El costo del vidrio es de \$60.00 el metro cuadrado; y el del marco, de \$85.00 el metro.

a) ¿Cuál es el costo total de una ventana con marco de 2 metros por lado? ____________

b) ¿Cuál es el costo total de una venta con marco de 1.5 metros por lado? ____________

c) Obtén la expresión algebraica que describe la relación entre el precio de la ventana (en pesos) en función de la medida de sus lados (en metros), incluido el costo del marco.

____

Lección 6

Eje: Manejo de la información.
Tema: Nociones de probabilidad.
Contenido: Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Los juegos de azar

El mundo en que vivimos encierra muchos acontecimientos donde resulta difícil saber el desarrollo futuro; en tales casos es importante recurrir a la probabilidad y a la estadística, dos ramas de las matemáticas que ayudan a predecir resultados y a decidir. Las situaciones que implican incertidumbre varían desde juegos de azar hasta problemas relacionados con las ciencias, la industria y los seguros.

¡Qué curioso!

¿Sabías que los dados existen desde las culturas antiguas, las cuales —según se cree— los utilizaban para predecir? Esto lo comprueban los encontrados en tumbas egipcias que datan de 2000 años antes de Cristo.

También hay constancia de que culturas como la griega, romana, azteca, maya y hasta polinesia los utilizaron, de materiales y formas variados.

Para saber más acerca de la historia de los dados consulta la siguiente página de internet:

http://www.taringa.net/post/info/13766767/La-Historia-de-los-dados.html

(Consulta: 13 de enero de 2017)

Punto de partida

En los recreos escolares, Roque juega apuestas con sus compañeros, y quiere adelantarse a los resultados para ir al ganador; el reto del día siguiente consiste en tirar al aire una moneda y un dado. Ayúdalo a calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

Evento A: Se obtienen un número par y sol.

Evento B: Se obtienen un número impar y águila.

Evento C: Se obtienen un número inferior o igual a 3 y sol.

Evento D: Se obtienen un número menor que 3 y águila.

Reúnete con otro compañero y escriban en el cuaderno el espacio muestral del experimento de lanzar simultáneamente una moneda y un dado.

Con base en el resultado anterior encuentren la probabilidad de los siguientes eventos:

a) $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$

b) $P(B) = \frac{1}{\square} =$ ____________

c) $P(C) = \frac{\square}{\square} =$ ____________

d) $P(D) = \frac{\square}{\square} =$ ____________

Respondan las siguientes preguntas:

a) De los cuatro eventos anteriores, ¿cuál escogerá Roque si quiere mayor probabilidad de ganar? ____________ ¿Por qué? ____________

b) ¿Cuál evento no debe escoger si quiere ganar? ____________
¿Por qué? ____________

c) ¿Alguno de los eventos tiene la misma probabilidad de ocurrir? ____________
Justifiquen la respuesta. ____________

Al día siguiente, Roque muestra los resultados a su compañero Luis, quien le plantea lo siguiente:

a) La probabilidad de que el evento A ocurra es de 25%

b) La probabilidad de que el evento B ocurra es de ____________

c) La probabilidad de que el evento C ocurra es de ____________

d) La probabilidad de que el evento D ocurra es de ____________

Comparen las probabilidades de Roque y las de Luis. ¿Cómo son entre sí?

____

Analicen los siguientes eventos y completen el texto:

Evento E: Se obtiene un número superior o igual a 1 y sale águila o sol.

Evento F: Se obtienen 0 y águila.

La probabilidad de que el evento E ocurra es de ____________; y la de F, de ____________. Por tanto, si Roque quisiera estar completamente seguro de que ganará conviene que escoja el evento ____________.

Comparen los resultados con otras parejas y corríjanlos en caso necesario.

Aprendemos

En equipo

Roque intenta complicar el experimento anterior y propone que, además de lanzar simultáneamente un dado y una moneda, extraigan de cierta bolsa negra una de las siguientes tarjetas:

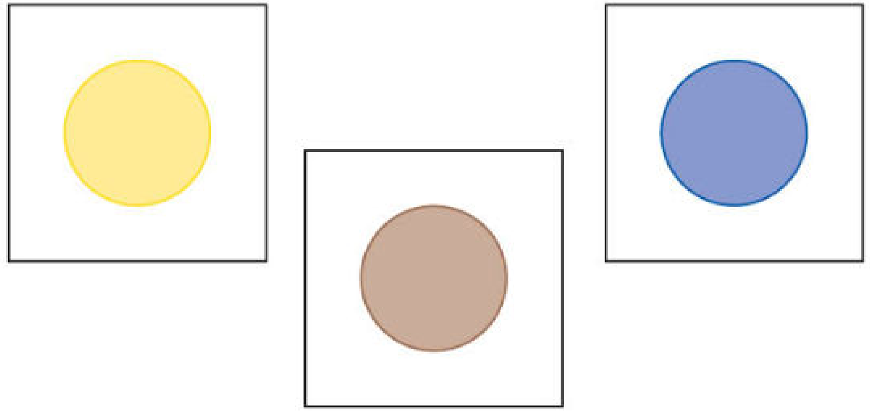


Figura 6.1.

1. **Reúnanse en equipos y representen en el cuaderno el espacio muestral.**
2. **Calculen la probabilidad de los siguientes eventos:**

a) Se obtienen 1, águila y la tarjeta con el círculo café.
b) Se obtienen un número mayor que 1, sol y la tarjeta amarilla.
c) Se obtienen un número primo, sol y la tarjeta azul.

$P(A)$: ____________
$P(B)$: ____________
$P(C)$: ____________

Acuérdate de...

Para calcular la probabilidad consideraremos lo siguiente.

- La cantidad total de posibilidades en que el evento ocurriría. Esta colección se denomina *espacio muestral*.
- La cantidad de posibilidades correspondientes al evento considerado. Es decir, ¿cuáles resultados son favorables?

La probabilidad del evento se calcula como sigue:

$$P = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}}$$

Acuérdate de...

Las fracciones propias son aquellas con numerador más pequeño que el denominador.
En las impropias, el numerador es más grande que el denominador.

3. **Contesten las siguientes preguntas:**

a) ¿Cuál de los eventos anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir? ______
¿Por qué? ______

b) ¿Cuál tiene menor probabilidad de ocurrir? ______
¿Por qué? ______

c) ¿Las posibilidades correspondientes a un evento dado son superiores, inferiores o iguales al total de ellas? ______

d) ¿Qué tipo de fracción, propia o impropia, representa el cociente del número de posibilidades de un evento y el total de ellas? ______

e) ¿Cuál es el valor máximo de la probabilidad de un evento? ______
¿Por qué? ______

f) ¿Cuál es el valor mínimo de la probabilidad de un evento? ______
¿Por qué? ______

g) ¿Qué indican los valores máximo y mínimo? ______

Compara tus respuestas con el resto del grupo y con ayuda del profesor identifiquen las más acertadas.

TIC y más

En las siguientes páginas de internet se muestran experimentos aleatorios y la probabilidad frecuencial. Revísalos y calcula la probabilidad de que el evento ocurra; compara tu resultado con el experimental:
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v02/u01t09s04.html
http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html
(Consulta: 13 de enero de 2017)

¡Ya lo aprendimos!

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que un suceso ocurra. Los valores comunes se encuentran entre el 0 y el 1: el 1 representa que el evento acontece; y 0, que no.

En pareja

Roque analiza el siguiente experimento aleatorio; ayúdalo a encontrar las diferencias entre los eventos planteados:

La prueba consiste en meter en cierta urna tres tarjetas pintadas cada una con cualquiera de los colores primarios (rojo, amarillo y azul) y tres más con combinaciones de éstos (naranja, verde y morado), para extraer luego una al azar, anotar el tono e introducirla de nuevo.

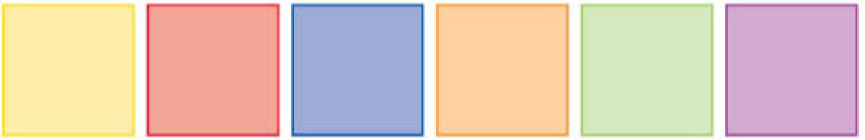


Figura 6.2

1. **Reúnanse en parejas y respondan lo siguiente:**

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento anterior? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener la tarjeta roja? ______

c) ¿Cuál es la de extraer una pintada con color primario? ______

d) ¿Cuál es la de extraer una pintada con color secundario? ______

2. **Identifiquen las características de los siguientes eventos relativos al experimento anterior:**

Evento A: Sale una tarjeta roja o amarilla.
Evento B: Sale una tarjeta azul o verde.

a) ¿Cuál es la probabilidad del evento A? ______

b) ¿Cuál la del B? ______

c) ¿Los eventos anteriores pueden ocurrir al mismo tiempo? ______
¿Cómo lo explicas? ______

d) ¿Cuáles son las características de los eventos anteriores? ______

Evento C: Se saca un color primario.
Evento D: Se saca un color secundario.

a) ¿Cuál es la probabilidad del evento C? ______

b) ¿Cuál la del D? ______

c) ¿Los eventos anteriores pueden ocurrir al mismo tiempo? ______
¿Cómo lo explicas? ______

d) ¿Cuáles son las características de los eventos anteriores? ______

En contexto

El servicio meteorológico nacional notifica pronósticos del tiempo, frentes fríos, aviso de ciclones, etcétera. ¿Qué significa pronóstico del tiempo?, ¿qué relación existe con la probabilidad? ¿Llovería, en caso de que la probabilidad de lluvia sea del 80%?
En la siguiente página de Internet podrás consultar el pronóstico del tiempo para la semana siguiente.
http://smn.cna.gob.mx/
(Consulta: 13 de enero de 2017)

3. **Respondan estas preguntas:**

a) Luis ha sacado tres veces consecutivas la tarjeta azul, ¿cuál es la probabilidad de que en la cuarta extraiga de nuevo la misma tarjeta? ______

b) Las últimas extracciones fueron con el siguiente orden: naranja, amarillo, naranja, naranja, rojo, naranja. ¿Cuál es la probabilidad de que en la séptima salga la tarjeta naranja? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una nueva partida la primera tarjeta en salir sea la morada? ______

d) Si en la primera extracción se obtuvo la tarjeta verde, ¿cuál es la probabilidad de que en la segunda vez se saque ésta nuevamente? ______

¡Ya lo aprendimos!

- **Dos eventos se dicen independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de que ocurra el otro; es decir, si uno sucede o no tampoco afecta el valor de la probabilidad del otro.**
- **Dos eventos se dicen mutuamente excluyentes si no pueden acontecer ambos de manera simultánea; es decir, la ocurrencia de uno exceptúa la del otro.**
- **Dos eventos se dicen complementarios si la ocurrencia simultánea de ambos tiene probabilidad 1: si uno de ellos no sucede, forzosamente el otro sí.**

Individual

1. **Revisa el ejercicio anterior y completa los siguientes enunciados escribiendo en la línea de qué tipo de evento se trata:**

   a) Los eventos A y B son ______________ porque ______________

   b) Los eventos C y D son ______________ porque ______________

   c) Los eventos del punto 3 son ______________ porque ______________

   Compara tus respuestas con las del resto del grupo; intercambia información relacionada con los eventos independientes, mutuamente excluyentes y complementarios; y escribe en el cuaderno una definición en la que todos estén de acuerdo.

2. **Analiza las siguientes situaciones y completa donde sea necesario:**

   a) Experimento: Se lanza un dado.
   Evento A: Se obtiene un número primo.
   Evento B: Se obtiene 1, 4 o 6.
   Los eventos son ______________. Lo sé porque ______________

   b) Experimento: Se lanza un dado de seis caras.
   Evento C: Se obtiene un número menor que 3.
   Evento D: Se obtienen 4, 5, 6.
   Los eventos son ______________. Lo sé porque ______________

   c) Experimento: Se lanza un dado de seis caras.
   Evento E: Se obtiene 2.
   Evento F: Se obtiene 2.
   Los eventos son ______________. Lo sé porque ______________

En equipo

1. **En equipos analicen el experimento aleatorio de lanzar dos dados de seis caras y sumar los puntos obtenidos. Observen los siguientes eventos y contesten las preguntas:**

   Evento F: La suma de los puntos es 4.
   Evento G: La suma de los puntos mostrados es 7.
   Evento H: Por lo menos un dado muestra un solo punto.

   a) ¿Los eventos F y G pueden ocurrir de manera simultánea? ______________
   Por tanto, son ______________

   b) ¿Los eventos G y H pueden ocurrir de manera simultánea? ______________
   Por tanto, los eventos G y H ______________

   c) ¿Los eventos F y H pueden ocurrir de manera simultánea? ______________
   Por tanto, los eventos F y H ______________

   Comparen sus respuestas con los otros equipos y escriban en el cuaderno las conclusiones obtenidas.

2. **Continúen el trabajo en equipos y el experimento aleatorio de lanzar dos dados de seis caras y sumar los puntos obtenidos. Observen y contesten las siguientes preguntas:**

   Evento I: La suma de puntos es un número par.
   Evento J: La suma de puntos es un número impar.

   a) ¿Los eventos I y J pueden ocurrir simultáneamente? ______________
   b) ¿Cuál es la probabilidad del evento I? ______________
   c) ¿Cuál la del J? ______________
   d) ¿Cuál es la suma de las probabilidades de ambos? ______________
   e) Si se conoce la probabilidad del evento I, entonces ¿puede saberse la del J? ______
   f) Se tira el par de dados, pero no ocurre el evento I. ¿Puede suceder uno diferente de J? __________ ¿Por qué? ______________

¡Hazlo tú mismo!

1. **Utiliza el experimento de la sección "Punto de partida" y escribe diferentes eventos que ejemplifiquen los tres tipos estudiados en la lección: independientes, mutuamente excluyentes y complementarios.**

2. **Coloca la letra del inciso en el evento que corresponda.**

a) Experimento: Se tira un dado de seis caras. Evento A: 6. Evento B: 1, 2, 3, 4, 5.	☐☐ Eventos independientes
b) Experimento: Se colocan en una urna cinco pelotas rojas y cuatro negras; se extrae una, se anota el color y se regresa al envase. Evento C: Se extrae una pelota roja. Evento D: Se extrae una pelota negra.	
c) Experimento: Se tira un dado de seis caras. Evento G: Se obtiene un número menor que 3. Evento H: Se obtiene un número superior o igual a 3.	☐☐ Eventos mutuamente excluyentes
d) Experimento: Se gira una ruleta. Evento I: Se obtiene el premio mayor en el primer giro. Evento J: Sale el castigo en el siguiente giro.	
e) Experimento: Se tiran tres monedas al aire. Evento K: Sale exactamente un águila. Evento L: No sale ningún águila.	☐☐ Eventos complementarios
f) Experimento: Se gira una perinola dos veces seguidas. Evento E: En el primer tiro sale "Todos ponen". Evento F: En el segundo tiro sale "Todos ponen".	

TIC y más

En la siguiente dirección de internet encontrarás una lectura para ampliar de forma amena tus conocimientos sobre eventos independientes:
http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L2_T2_text_final_es.html
(Consulta: 24 de enero de 2017)

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan las preguntas en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Lección 7

Eje: Manejo de la información.
Tema: Análisis y representación de datos.
Contenido: Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Figura 7.1 La muestra representativa, las preguntas del cuestionario y las herramientas para presentar resultados son fundamentales en toda encuesta.

¡A investigar!

El censo de población y vivienda es muy útil para conocer las características del territorio nacional. El Instituto Nacional de Estadística y Geografía capta, procesa y difunde la información en él recabada, la cual se utiliza para planear políticas económicas, de desarrollo social y de salud, por ejemplo.

Para llevar a cabo el conteo se aplica un cuestionario con preguntas dirigidas a obtener cierto tipo de información; después, las respuestas se procesan y representan en gráficas, tablas u otros recursos para ofrecerlas al público en general.

Con frecuencia no es posible, por el costo o tiempo que representa, encuestar a un gran número de personas. Así, se elige un grupo pequeño que represente al más numeroso. Esta selección reviste un carácter crucial para obtener resultados fieles, útiles y efectivos. Las preguntas por aplicar deben diseñarse de tal manera que se obtenga la información deseada.

Punto de partida

Reúnanse en equipos y realicen lo siguiente:

a) Con ayuda del profesor completen la tabla 7.1 (de ser necesario, agréguenle columnas o filas) contestando la siguiente pregunta:

- ¿En dónde estudian mejor: en la escuela, en la biblioteca o en casa?

Alumno	Lugar de estudio	Alumno	Lugar de estudio	Alumno	Lugar de estudio
1		13		25	
2		14		26	
3		15		27	
4		16		28	
5		17		29	
6		18		30	
7		19		31	
8		20		32	
9		21		33	
10		22		34	
11		23		35	
12		24		36	

Tabla 7.1

b) ¿La información anterior representa a todos los estudiantes de la escuela? ______
¿Por qué? ______

c) Si tomaran en cuenta sólo las respuestas de un equipo, ¿la información representaría a todos los integrantes del grupo? ______

d) Si los profesores quisieran conocer el mejor lugar que tienen los alumnos para estudiar en el ámbito nacional, ¿a quiénes deberían preguntar? ______
¿Por qué? ______

e) En una presentación para exponer los datos obtenidos al inicio de la clase, ¿qué herramientas utilizarían? ______

f) Encuentren la **moda** de los datos anteriores. ¿Qué información representa? ______

g) Representen los datos de la **encuesta** en una gráfica de barras y una de pastel, o de otro tipo si lo consideran conveniente.

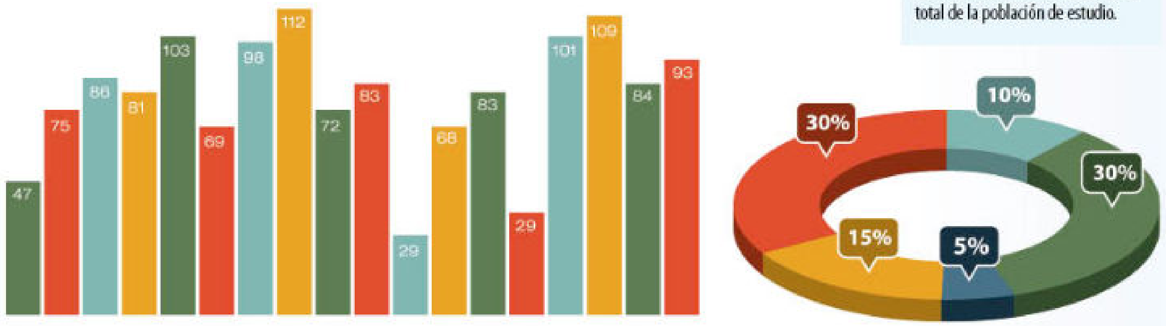


Figura 7.2 La expresión gráfica facilita la comprensión de datos o resultados.

h) ¿Cuáles son las ventajas y los inconvenientes de las gráficas anteriores? ______

i) Al finalizar discutan de manera grupal respecto a los resultados obtenidos por cada equipo, a la manera en que los presentaron y a los cambios que cabrían realizar en los lugares de estudio para concentrarse mejor.

Glosario

moda: en estadística, corresponde al dato que más se repite.
encuesta: método de investigación basado en un cuestionario con preguntas normalizadas que se aplica a los integrantes de una muestra o al total de la población de estudio.

Aprendemos

En pareja

1. Lean el siguiente texto y contesten las preguntas que se plantean:

Sandra y su equipo deben aplicar una encuesta acerca de algún tema que les interese. Tienen algunas preguntas en mente como éstas:

- **¿Cuánto tiempo requieren para ir de la casa a la escuela sus compañeros de colegio?**
- **¿Cuál es el tipo de sangre de los estudiantes de su escuela?**
- **¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con deficiencia visual?**

a) Una vez elegido el tema, Sandra opina que sigue aplicar una encuesta. ¿Están de acuerdo? ______ ¿Por qué? ______

b) Luis, compañero de Sandra, dice que las respuestas de la encuesta deben ser **cerradas** para ahorrar tiempo. Sin embargo, Ximena las prefiere **abiertas** a fin de que los consultados expresen sus ideas. ¿Qué opinan? ______

Glosario

Según el tipo de información que admitan, las respuestas de una encuesta son:
abiertas: en ellas se admiten cualquier comentario y extensión. No hay categorías de respuesta.
cerradas: el entrevistado debe elegir una opción de una lista sugerida.

En contexto

El diseño de una encuesta es muy útil para conocer el gusto de satisfactores y necesidades. En la *Revista del Consumidor* se encuentran diversos estudios realizados a la calidad de artículos con base en encuestas de los que son más vendidos, ¿qué ventajas tiene el comparar los precios de artículos?, ¿Por qué es importante revisar la calidad de los artículos? En la siguiente página de Internet se muestra la revista del consumidor en línea, puedes consultarla para algún artículo que te interese.
http://revistadelconsumidor.gob.mx/
(Consulta: 13 de enero de 2017)

c) Después se preguntan acerca del número de estudiantes por encuestar para obtener información ajustada a la realidad. Escriban cuántos bastarían al efecto.

___

d) De las siguientes opciones, elijan la que crean idónea para escoger a los entrevistados:

- Obtener los nombres del alumnado de la escuela, meterlos en una bolsa y elegir algunos (*azar*).
- Aplicar la encuesta a los compañeros del grupo (*conveniencia*).
- Colocar en la reja escolar una solicitud sobre la participación de los compañeros para contestar las preguntas (*convocatoria*).

e) Una vez recabada la información, la organizaron y quieren presentarla al grupo mediante una gráfica, de acuerdo con el tema elegido y el tipo de preguntas. ¿Cuál deberían utilizar? ___

Comparen sus respuestas en grupo y entre todos escojan las que consideren acertadas.

En equipo

1. **Elijan un tema de interés como hicieron Sandra y sus compañeros y diseñen una encuesta; después presenten los resultados ante el grupo. Tomen en cuenta lo siguiente:**

- Elegir el tipo de personas que les interesa estudiar.
- Elegir el tamaño de la muestra por estudiar.
- Escoger un método adecuado para seleccionar la muestra.
- Redactar preguntas dirigidas a obtener la información de interés.
- Elegir el tipo y el número de preguntas que deben redactarse.
- Escoger el tipo de presentación adecuada a su estudio.
- Utilizar las medidas de tendencia central para analizar resultados.
- Escribir las conjeturas.

Al final de su presentación deben darse un tiempo para discutir y explicar los resultados que no hayan quedado claros a los compañeros.

En pareja

1. **Reúnanse en parejas, lean la siguiente situación y completen la información solicitada:**

a) Luisa quiere iniciar un negocio de venta de material para tejido con gancho, aguja y bordado. Duda acerca de la mejor opción para invertir y decide hacer una investigación. Ayúdala; completa los aspectos que debe tomar en cuenta:

- ¿Cuál es la **población** de estudio? ___

- ¿A quién debe tomar en cuenta para la **muestra**? ___
  ¿De qué tamaño debe ser ésta? ___
- ¿Cómo debe hacer el **muestreo** si quiere un negocio exitoso? ___
- ¿De cuántas preguntas debe constar el cuestionario? ___
- ¿Qué herramientas debe utilizar para presentar los resultados a su hermana si quiere convencerla de invertir con ella? ___

Glosario

población: conjunto de elementos que se desean estudiar.
muestra: subconjunto de la población.
muestreo: método utilizado para obtener una muestra.

¡Ya lo aprendimos!

La encuesta se utiliza a fin de obtener, con ahorro de tiempo y esfuerzo, datos de una población. Para garantizar resultados fiables, se escoge una muestra adecuada a la información deseada. El entrevistador diseñará una serie de preguntas en un lenguaje claro para que los consultados respondan sin problema.

Una vez identificada la población por estudiar, el tamaño de la muestra debe ajustarse para que la información obtenida represente a aquélla.

Los resultados se pueden presentar en tablas o gráficas; también, se puede calcular una o más medidas de tendencia central para mayor análisis de los datos.

En equipo

1. **Reúnanse en equipos y desarrollen la siguiente actividad:**

a) Propongan una pregunta que consideren interesante. Por ejemplo: ¿cuántas personas saben leer y escribir?, o ¿cuál es su deporte favorito?

b) Definan la población que les interesa estudiar, la muestra y el modo de obtener información.

c) Seleccionen el tipo de preguntas conveniente según el tema de investigación.

d) Consideren en la encuesta diversas características de los consultados: sexo, edad y grado escolar, entre otras.

e) Respondan las siguientes preguntas:

- ¿Consideran que los resultados de la encuesta serán más fiables o menos según el número de encuestados? ___ ¿Por qué? ___

Para determinar cuántos encuestados se requieren respondan las siguientes preguntas:

- Si la pregunta atañe a las preferencias de los estudiantes de su escuela, ¿la encuesta debe aplicarse a quienes no lo son, como profesores, padres de familia o incluso estudiantes externos?

- ¿Debe haber más encuestados masculinos que femeninos o la misma cantidad?

  ¿Por qué?

- ¿Debe haber más personas de una que de otra edad?

  ¿Por qué?

- En función de las respuestas a las preguntas anteriores propongan un número mínimo de personas que deban ser encuestadas

- ¿Deben elegirse al azar los encuestados o con un criterio arbitrario; por ejemplo, sólo las personas cuyo apellido empieza con la letra *p* o las que usan reloj de pulsera?

  ¿Por qué?

- Si consideran conveniente elegir a los encuestados al azar, ¿qué método emplearían?

  ¿Por qué?

- Si consideran una forma de elegir a los encuestados que no implique el azar, ¿qué método emplearían?

  ¿Por qué?

- ¿Qué método conviene: elegir al azar o con un criterio arbitrario?

  ¿Por qué?

- ¿Deben ser diferentes para cada consultado las preguntas de la encuesta o siempre las mismas? ¿Por qué?

- ¿Quizás algunos encuestados no respondan con la verdad?

  ¿Por qué?

  Si la respuesta fue afirmativa, ¿cómo considerarían este factor en la encuesta?

f) Diseñen las preguntas de la encuesta según lo obtenido en las anteriores y organicen el equipo de tal manera que cada integrante aplique el cuestionario a cierto número de personas.

g) Antes de aplicar la encuesta, muestren las preguntas al profesor; juntos revisen si hay algo por cambiar.

h) Al terminar, ordenen los resultados, obtengan las medidas de tendencia central que consideren convenientes y organicen en tablas o gráficas la información.

i) Realicen su presentación ante el grupo. Si difieren los resultados, encuentren las razones.

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan las preguntas en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Hazlo tú mismo!

1. Enumera los pasos para aplicar una encuesta:

2. En las siguientes proposiciones coloca "F" si el enunciado es falso y "V" si resulta verdadero:

a) Una muestra es cierta porción de una población escogida al azar.

b) El tamaño de la muestra es el mismo en todas las encuestas.

c) Se encuesta preferentemente a personas adultas.

d) Debe aplicarse a todos los encuestados el mismo cuestionario.

e) Importa que la muestra sea representativa para generalizar los resultados obtenidos.

f) Las encuestas más amplias son las de mayor confiabilidad.

3. Lee las siguientes situaciones e indica qué podría disminuir la fiabilidad de las estadísticas y cómo se previene:

a) El dueño de una tienda entrevista a todos los empleados y declara que 93% está contento ahí, que hombres y mujeres reciben el mismo trato y que el sueldo corresponde con el trabajo realizado.

- La disminución de la fiabilidad puede obedecer al hecho de que
- Se previene con lo siguiente:

b) Para saber la aceptación del público hacia determinado producto se aplicó una encuesta de 100 preguntas.

- La disminución de la fiabilidad puede obedecer al hecho de que
- Se previene con lo siguiente:

c) En una reunión de padres de familia se aplica una encuesta para saber el monto de los ingresos mensuales. Tras organizar y analizar la información, el promedio obtenido es de $16 500.00.

- La disminución de la fiabilidad puede obedecer al hecho de que
- Se previene con lo siguiente:

Lee cada situación y elige la respuesta correcta.

Situación 1. La suma de las edades de Jorge y Ramiro es 23 años; y su producto, 102.

1. **¿Cuáles expresiones matemáticas sirven para encontrar las edades de Jorge y de Ramiro?**

   a. $xy = 102$, $x + y = 23$ *b.* $xy = 23$, $x + y = 102$ *c.* $xy + 23 = 0$, $x + y + 102 = 0$ *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **¿Cuál ecuación cuadrática debe resolverse para encontrar la solución?**

   a. $x^2 + 2.3x - 10.2 = 0$ *c.* $x^2 - 23x + 102 = 0$
   b. $x^2 + 23x - 102 = 0$ *d.* Otra. Escríbela. ________

3. **¿Cuáles de las parejas siguientes representan la solución del problema?**

   a. 8 y 15 *b.* 6 y 17 *c.* 9 y 14 *d.* Otra. Escríbela. ________

Situación 2. En la figura 1.1 se muestra el diseño de una ventana de forma rectangular, donde *E* es el punto medio de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

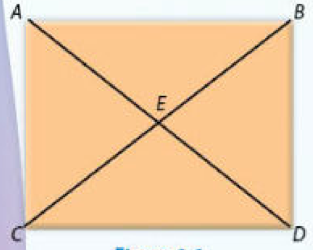


Figura 1.1

1. **¿Qué parejas de ángulos son congruentes?**

   a. $\measuredangle AEC \cong \measuredangle BED$, $\measuredangle AEB \cong \measuredangle CED$ *b.* $\measuredangle AEC \cong \measuredangle CED$, $\measuredangle AEB \cong \measuredangle BED$ *c.* $\measuredangle AEC \cong \measuredangle AEB$, $\measuredangle AEB \cong AEC$ *d.* Otra. Escríbela. ________

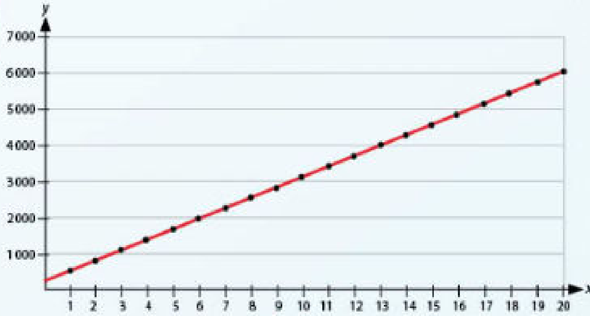
2. **¿Qué parejas de triángulos son congruentes?**

   a. $\Delta AEC \cong \Delta BED$, $\Delta AEB \cong \Delta CED$ *b.* $\Delta AEC \cong \Delta CED$, $\Delta AEB \cong \Delta BED$ *c.* $\Delta AEC \cong \Delta AEB$, $\Delta AEB \cong \Delta AEC$ *d.* Otra. Escríbela. ________

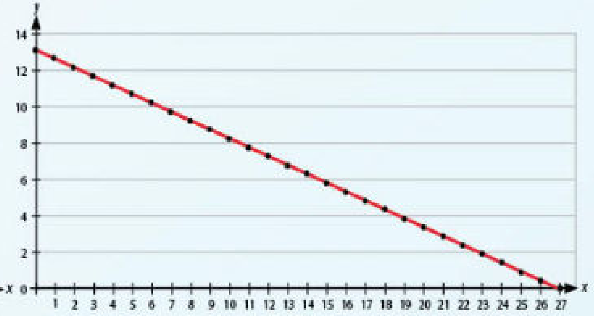
3. **¿Qué criterio de congruencia utilizaste para resolver la pregunta anterior?**

   a. LLL *b.* LAL *c.* LLA *d.* ALA

Situación 3. Observa las siguientes gráficas.



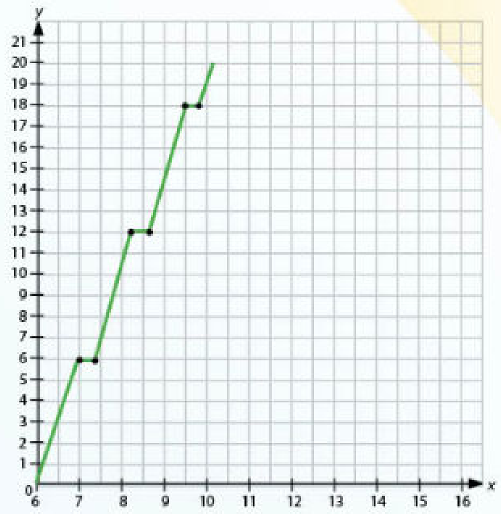
Gráfica 1.1



Gráfica 1.2

1. **Escribe Falso o Verdadero, según corresponda.**

   a. La gráfica 1.1 representa las ganancias de un profesor de piano que recibe \$300.00 por hora. ________
   b. La gráfica 1.2 representa el número de cafeteras restantes en una tienda donde se regalan 13 de ellas a razón de 1 cada 30 minutos. ________
   c. La gráfica 1.3 representa el recorrido de un cartero que se detiene a descansar 15 minutos cada hora. ________
   d. La representación algebraica correspondiente a la gráfica 1.1 es $y = 300\,t$. ________
   e. La gráfica 1.1 corresponde a una relación de proporcionalidad directa. ________
   f. La representación algebraica correspondiente a la gráfica 1.2 es $y = 13 - x$ ________
   g. La gráfica 1.3 corresponde a una relación de proporcionalidad directa. ________



Gráfica 1.3

Situación 4. En una bolsa se colocan tres papeles azules, tres rojos y tres blancos. Considera el experimento de sacar uno, anotar el tono y devolverlo a la bolsa.

1. **La probabilidad de sacar uno rosa es**

   a. 1 *b.* 0.5 *c.* 0 *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **La probabilidad de sacar uno rojo, azul o blanco es**

   a. 1 *b.* 0.5 *c.* 0 *d.* Otra. Escríbela. ________

3. **¿Cuál es la probabilidad de sacar un papel rojo?**

   a. $\frac{1}{9}$ *b.* $\frac{1}{3}$ *c.* $\frac{1}{6}$ *d.* Otra. Escríbela. ________

4. **Los eventos *A*: En la primera extracción se tiene un papel rojo, y *B*: En la segunda extracción se tiene un papel rojo son**

   a. Mutuamente excluyentes *c.* Complementarios
   b. Independientes *d.* De otro tipo. Escríbelo. ________

5. **Los eventos *A*: Sacar un papel azul, y B: Sacar un papel blanco o rojo son**

   a. Mutuamente excluyentes *c.* Complementarios
   b. Independientes *d.* De otro tipo. Escríbelo. ________

Bloque 2

Aprendizajes esperados

Al terminar el estudio del presente bloque serás capaz de:

- Explicar el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identificar las propiedades que se conservan.
- Resolver problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Cuando descubrimos en la naturaleza la variedad de formas y colores, encontramos regularidades; pero eso es sólo el principio. Nuestra mente tiene la maravillosa habilidad de jugar con tales configuraciones para hacerlas y rehacerlas en sus infinitas posibilidades. Una herramienta es la *transformación geométrica*, relacionada con las ideas de la simetría.

La geometría constituye también un escenario de expresión de las complejas ideas matemáticas que nuestra mente incorpora de modo deliberado. Ejemplo de ello es el famoso teorema atribuido a Pitágoras de Samos; sin embargo, tal conocimiento no era exclusivamente suyo: los babilonios y los egipcios anteriores a él ya lo usaban de manera práctica. ¿Cómo es posible esto? Descúbrelo en las siguientes páginas.

Lección 8

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema: Patrones y ecuaciones.
Contenido: Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Los diseños de aluminio

Al modelar distintos fenómenos que se presentan en la naturaleza, estos adquieren formas matemáticas interesantes. Por ejemplo, el tiro parabólico conduce al planteamiento de una ecuación cuadrática cuyas soluciones adquieren un significado físico que ayuda a comprender este fenómeno gobernado por la gravedad.

Existen varios caminos para llegar a estas soluciones; una de ellas es el proceso de "factorización" que consiste en descomponer una expresión algebraica en factores mas sencillos de interpretar.

En la lección verás que el término *factorizar* no resulta nuevo para ti: sabes que puedes descomponer 24 en dos factores, 6 y 4, pues 6 veces 4 es 24; o bien, en otros, como $(2^3)(3)$. También conoces factores como $(x + 6)(x - 9)$, cuyo producto es una expresión con propiedades importantes para comprender las ecuaciones cuadráticas.

Punto de partida

Cierta fábrica dedicada a realizar trabajos de aluminio tiene un pedido especial: construir distintos marcos para fotografías, como se muestra en la figura 8.1; la única condición es que el perímetro de la pieza mida 50 cm.

a) ¿Cuáles medidas podrás obtener? ______

b) Una fotografía cubre una superficie de 156 cm², ¿cuáles serían las medidas posibles de su alto y ancho? ______ Escribe una ecuación que modele el problema. ______

c) ¿Hay otra manera de representar esta ecuación? ______

d) Comenta con los compañeros si hay diferentes maneras de representar la ecuación que modela el problema y escribe tus conclusiones. ______

e) Completa la siguiente tabla:

Ancho	Alto	Perímetro del marco	Superficie que abarca

Tabla 8.1

f) Compara los datos de la tabla con las respuestas de las preguntas iniciales y observa si consideraste todos los productos. ______

g) Comparte las respuestas con el resto del grupo y con la guía del profesor, expliquen cómo resolvieron el problema. Describe la estrategia de solución.

______

Acuérdate de...

El polinomio (del griego *polys*, "muchos"; y *nómos*, "distribución") es una expresión algebraica compuesta de dos o más monomios. El monomio es la expresión matemática compuesta de un solo término con su respectivo coeficiente, literal y exponente.

Figura 8.1

Aprendemos

En equipo

1. A Bernardo, trabajador de la fábrica, encomendaron construir una estructura rectangular con los materiales mostrados en la figura 8.2.

- Dos vidrios cuadrados de x metros por lado.
- Ocho rectángulos de aluminio de 1 metro de ancho por x metros de largo.

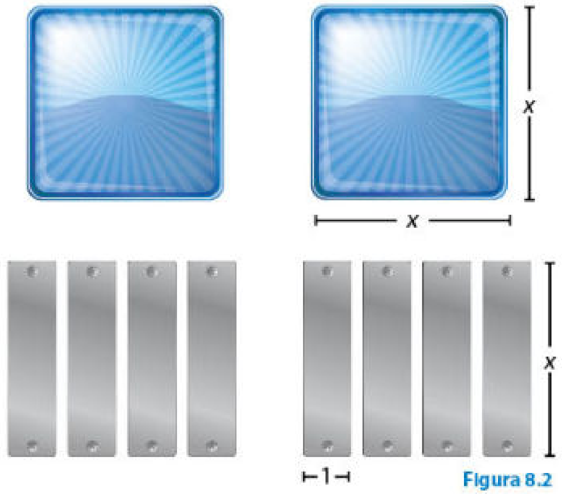


Figura 8.2

Acuérdate de...

Propiedad distributiva se emplea en el campo de aritmética y álgebra; es una de las propiedades de la multiplicación que se aplica respecto a una suma o a una resta. Dados tres números enteros a, b y c, el producto es $(a)(b + c) = ab + ac$.

2. Bernardo dibuja los bosquejos 1 (figura 8.3) y 2 (figura 8.4) antes de ensamblar la estructura.

a) ¿Cuáles serían las dimensiones del bosquejo 1? Exprésalas en término de x.

Largo: ______

Ancho: ______

Área: ______

b) ¿Cuáles serían las dimensiones del bosquejo 2?

Largo: ______

Ancho: ______

Área: ______

c) Expresa las áreas de las estructuras en términos de x: ______

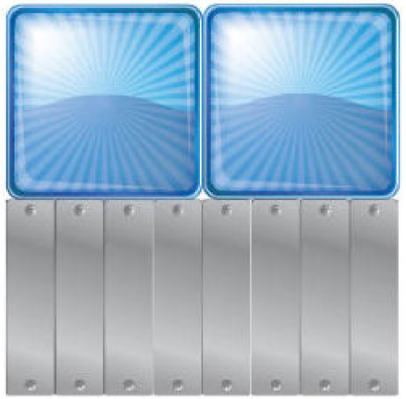


Figura 8.3

d) ¿Es posible obtener otra estructura rectangular distinta a los bosquejos presentados? ______. Argumenta tu respuesta: ______

e) Comparen sus diseños con los de otros compañeros. ¿Son iguales? ______.
¿Por qué? ______

Figura 8.4

¡Qué curioso!

El *Cubo (Cube)* es una película de terror y ciencia ficción dirigida en 1997 por Vincenzo Natali; la historia comienza cuando seis desconocidos despiertan en cierta habitación cúbica, la cual contiene a su vez infinidad de habitaciones, algunas con trampas mortales. Forman el grupo un escapista, un policía, una persona discapacitada, una médica, una brillante estudiante de matemáticas y un autista (de gran importancia en la trama).

La película es interesante y atrayente, pero a la vez misteriosa y en ocasiones compleja. Si encuentras la factorización hallarás la salida.

3. Bernardo solicitó 8 cuadrados de aluminio de una unidad por lado, y construyó nuevos modelos de estructuras (figuras 8.5 y 8.6).

a) ¿Qué expresión algebraica determina las dimensiones de las estructuras en términos de x?

Figura 8.5

Largo: ____________
Ancho: ____________
Área: ____________

Figura 8.6

Largo: ____________
Ancho: ____________
Área: ____________

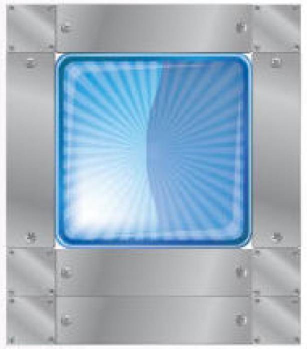


Figura 8.7

Largo: ____________
Ancho: ____________
Área: ____________

4. Para un trabajo especial, Bernardo ha hecho el bosquejo como se muestra en la figura 8.7.

a) Encuentra sus dimensiones.
b) ¿Qué área abarca la estructura en términos de x?
c) ¿Qué área abarca la estructura cuando $x = 1$ m, 2 m, 3 m, 4 m o 5 m? ¿Cómo representarías estas posibilidades sin usar bosquejos?
d) ¿Qué expresión algebraica representa el área "Y" de la estructura en términos de "x"?

5. Dibuja el bosquejo de una estructura con el mismo material que los anteriores, de manera que la estructura tenga por área la expresión $x^2 + 9x + 20$.

6. Encuentra las dimensiones de otras estructuras cuya área quede determinada por las siguientes expresiones:

a) $x^2 + 3x + 6$ *b)* $x^2 + 6x + 9$ *c)* $x^2 + 13x + 40$ *d)* $x^2 + 19x + 90$

7. Comparte tus resultados con un compañero. Si tienen resultados distintos, argumenten sus propias respuestas para llegar a una solución común. Con la guía del profesor confronten resultados para determinar una solución grupal.

¡Ya lo aprendimos!

De acuerdo con los bosquejos 1 y 2, el polinomio $2x^2 + 8x$ puede expresarse como producto de dos factores:

$$2x^2 + 8x = x(2x + 8)$$
$$2x^2 + 8x = 2x(x + 4)$$

Con estos arreglos hemos factorizado de dos maneras la expresión $2x^2 + 8x$, es decir, hemos representado la expresión algebraica en términos de sus factores. Se trata de la factorización por factor común de un polinomio.

Para encontrar el factor común

- Buscamos el MCD de los coeficientes
- Se toman de las literales repetidas la de menor exponente, y junto con el MCD se forma el factor común. (Si algún término carece de literal, se toma sólo el MCD como factor común.)

$$2x^2 + 8x \quad \text{Factor común: } 2x$$

- Dividimos todos los términos entre el factor común y así obtenemos el factor polinomio:

$$\frac{2x^2 + 8x}{2x} = x + 4$$

En los modelos de puerta *A* y *B* factorizaste el polinomio, que es igual al producto de $(x + 2)(2x + 4)$. Sin embargo, al hacerlo por factor común obtenemos la siguiente expresión:

$2(x^2 + 4x + 4) =$

El factor $(x^2 + 4x + 4)$ ¡es un trinomio cuadrado perfecto! Por tanto, se puede volver a factorizar.

$2(x + 2)(x + 2) =$

$2(x + 2)^2$

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto (TCP), primero se averigua si es o no un TCP:

1. Ordenas en forma decreciente: $(x^2 + 4x + 4)$
2. Extraes la raíz cuadrada de los extremos: $x \quad 2$
3. Calculas el doble producto de las raíces: $2(x)(2) = 4x$
4. Comparas el resultado con el término de en medio. Si son iguales, se trata de un TCP.

Cuando un trinomio es un cuadrado perfecto, la factorización resulta simple, pues se forma un binomio con las raíces y el signo del término de en medio y se eleva al cuadrado:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Acuérdate de...

Simplificación de expresiones algebraicas.

Acuérdate de...

El MCD (máximo común divisor) de dos o más números es el mayor entero que puede dividirlos; la manera más directa de calcularlo corresponde a la descomposición de factores:

2	8	2
1	4	

MCD = 2

TIC y más

Entra en el sitio siguiente y podrás calcular automáticamente el MCD: http://es.onlinemschool.com/math/assistance/number_theory/nod_nok/
(Consulta: 24 de enero de 2017)

Para factorizar la expresión $x^2 + 5x + 6$ se procede como sigue:

- Encontrar dos números enteros que sumados den el coeficiente b:

  $b = 5$

  $3 + 2 = 5$

- Pero que también multiplicados den el coeficiente c:

  $c = 6$

  $(3)(2) = 6$

Por tanto, los factores son $(x + 3)(x + 2)$. Esta factorización puedes emplearla sólo con ecuaciones de la forma $x^2 + bc + c$

TIC y más

Verifica si tus soluciones son correctas; sólo entra en el sitio siguiente y proporciona los datos de la ecuación: http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas-solucionador.html

(Consulta: 24 de enero de 2017)

En equipo

1. **En equipo resuelvan el siguiente problema: Se tiene una ventana cuadrada cuyas dimensiones son x + 2 por lado. Si la pieza ocupa una superficie de 6 724 cm², ¿cuáles son las medidas correspondientes?**

Largo: ______________

Ancho: ______________

Área: ______________

Ecuación: ______________

Solución: ______________

Figura 8.9

2. **¿Cuántas soluciones encontraron? ______. Según el contexto del problema, ¿cuántas de ellas son válidas? ______________**

¡Ya lo aprendimos!

Hay varios métodos para encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado: fórmula general, factorización y método gráfico, entre otros. En la lección aprendiste a factorizar; pero, ¿cómo aplicar alguno de los ya estudiados para encontrar las soluciones de un trinomio? Una vez factorizado se aplica la **propiedad cero de la multiplicación**: "si el producto de dos cantidades es cero, entonces una de las dos o ambas valen cero".

Es decir, si $(x)(y) = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.

Para solucionar el problema anterior analiza el enunciado siguiente:

Si el área en término de x es $x^2 + 4x + 4$ y el área también es 6 724, entonces obtienes la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 6\,724$.

Al igualar a cero obtienes: $x^2 + 4x - 6\,720 = 0$.

Debes factorizarla para encontrar la solución del problema.

De los diversos métodos para factorizar, ¿cuál utilizar?

1. Por factor común no se aconseja porque el MCD de los coeficientes es 1.
2. Por trinomio cuadrado perfecto no, pues tampoco es un TCP.
3. Por trinomio de la forma $x + bc + c$ es el criterio más adecuado.

Observa:

$$x^2 + 4x - 6\,720 = 0$$

Esta ecuación es factorizable como el producto de binomios con término común: $(x - 80)(x + 84) = 0$. Como el producto de dos binomios es cero, aplicamos la **propiedad cero de la multiplicación**, y tenemos que:

$$x - 80 = 0 \quad \text{o} \quad x + 84 = 0$$

Por tanto, si despejamos la incógnita en cada una de las igualdades obtendremos las raíces de la ecuación.

$$x_1 = 80 \quad \text{o} \quad x_2 = -84$$

Evaluando al Equipo

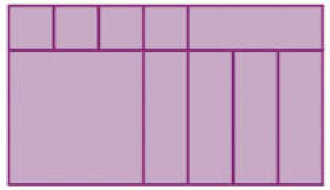
Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

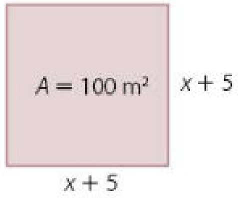
¡Hazlo tú mismo!

1. **Resuelve por factorización los siguientes problemas; sustituye las raíces en la ecuación original y comprueba:**

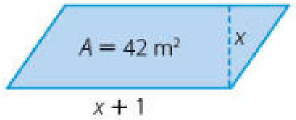
   a) ¿Cuáles son las dimensiones del siguiente rectángulo si el área corresponde a 70 cm²?



   b) ¿Cuál es perímetro del siguiente cuadrado?



   c) ¿Cuánto miden la base y la altura del siguiente romboide?



En contexto

La factorización de polinomios es aplicable en toda organización social (empresas, familias, escuelas) porque facilita el trabajo en equipo y la disposición de competencias de cada uno de sus miembros en torno a un objetivo común. Siempre que se agrupen problemas grandes para reducirlos y facilitar su resolución, se está factorizando.

2. **Resuelve por factorización las siguientes ecuaciones cuadráticas:**

   a) $4x^2 + 6x = 0$ *b)* $x^2 + 4x + 3 = 0$ *c)* $x^2 + 10x + 25 = 0$ *d)* $x^2 = 25$ *e)* $x^2 + 5x = -6$

Lección 9

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Figuras y cuerpos.
Contenido: Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

Rotación y traslación

La rotación y la traslación las encontramos en todos lados; ambas las realiza, por ejemplo, la Tierra. En la segunda, impulsada por la gravitación el planeta se mueve alrededor del Sol durante aproximadamente 365 días; con ello se tienen las estaciones del año. En la primera gira alrededor de un eje que pasa por los polos: en un lapso de 24 horas da vuelta completa, a lo cual se deben los días –dicho astro ilumina el horizonte– y las noches –han desaparecido los rayos–; por este fenómeno, los continentes pasan de la luz a la oscuridad y viceversa.

Punto de partida

A Valeria le gusta mucho la astronomía y quiere adornar con lunas y una estrella fosforescente el techo de su habitación. En las figuras 9.1 y 9.2 se muestran la imagen base, una luna, y la que desea colocar en dicha área:

Figura 9.1

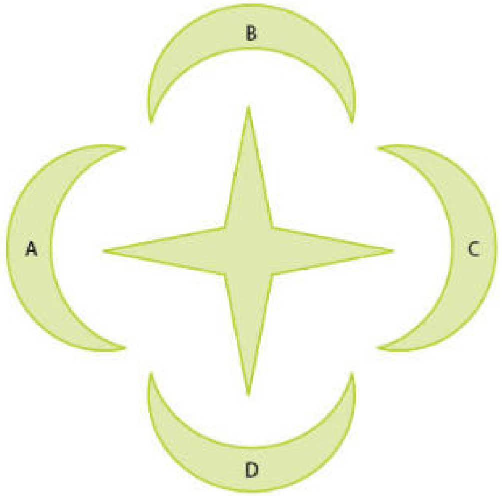


Figura 9.2

a) ¿Qué hizo Valeria para formar la figura 9.2 con base en la 9.1? ______

b) ¿Cómo se calcula el centro de la figura 9.2? ______

c) La figura 9.1 es la base, ¿cómo se realizaría la luna B? ______

d) ¿Qué es transformar una figura? ______

e) Escribe la diferencia entre la rotación y la traslación de una figura. ______

f) Con base en la figura 9.2, ¿cuáles lunas son simétricas respecto a la 9.1? ______

g) ¿Qué es la simetría? ______

En contexto

Es importante cuidar el ambiente, por lo que algunos contenedores de basura tienen el siguiente símbolo, ¿qué significa este símbolo?, ¿cuál es la relación que tiene con la rotación y traslación?, ¿por qué es importante cuidar el ambiente?

Puedes encontrar más información en la siguiente página de internet: http://www.parquebiotematicomegua.com/index.php/amigos-del-parque/eventos/35-el-simbolo-de-reciclaje-su-historia-y-significado (Consulta: 13 de enero de 2017)

Aprendemos

Individual

La estrella de Valeria de la figura 9.2 está formada por cuatro triángulos isósceles y un cuadrado. Si consideras como imagen base uno de los triángulos, ¿cómo producirías los demás triángulos? Dibuja en el cuaderno lo hecho para modelarlos.

¡Qué curioso!

La Tierra se traslada y rota sobre su eje: el primer movimiento dura 365 días y 6 horas (éstas se acumulan cada año); y el segundo, 23 horas con 56 minutos y 4 segundos.

En equipo

1. **Reúnanse en equipos, comparen los dibujos y respondan:**

a) ¿En qué se basaron para escoger el triángulo base? ______

b) ¿Eligieron el mismo triángulo base? ______ ¿Qué diferencias notan de acuerdo con el elegido? ______

c) Con el transportador midan los ángulos utilizados para rotar cada triángulo de la estrella de la figura 9.2.

d) Respecto al tomado como base, ¿cuál o cuáles triángulos son simétricos? ______

e) ¿Cuál es el área de cada triángulo? ______

f) ¿Qué concluirían respecto al área de los triángulos? ______

2. **A Valeria la visitó su amiga Laura, quien le dijo que prefiere las estrellas de cinco picos.**

a) Consideren imagen base el triángulo de la figura 9.3 para dibujar una estrella de cinco picos:

Figura 9.3

b) Asignen a cada triángulo las letras *A, B, C, D, E* y respondan:

i) ¿Cuál o cuáles triángulos son simétricos respecto al de la figura 9.3? ______

______

ii) ¿En cuál o cuáles triángulos aplicaron transformaciones? ______

¿Por qué? ______

______

iii) ¿En cuál o cuáles triángulos aplicaron rotaciones? ______

¿Por qué? ______

______

c) Con la regla graduada midan la distancia hacia el o los triángulos simétricos, ¿cuál o cuáles son éstos? ______ Justifiquen la respuesta.

______

d) Midan los triángulos y calculen el área de cada uno. ¿Qué observan? ______

______

e) ¿Qué concluyen sobre las áreas de las figuras al realizar una traslación? ______

______

f) ¿Qué sucede con el área y el perímetro al aplicar una rotación a cualquier figura?

______

3. Si el triángulo base que propone Laura fuera equilátero:

a) ¿Qué sucede si rotan el triángulo 120°? ______

b) ¿Qué sucede si lo rotan 180°? ______

¡Ya lo aprendimos!

Una figura se transforma al aplicarle movimientos de traslación, rotación, reflexión o una mezcla de ellos, con lo cual se obtiene una congruente a partir de otra.

En la traslación de una figura se utiliza como directriz la recta llamada *eje;* la distancia entre los puntos homólogos, denominada *amplitud*, es la misma.

La rotación es el giro, de magnitud en grados, que una figura realiza hacia la izquierda o la derecha respecto a un eje.

La reflexión de una figura *(1)* es el reflejo *(2)* respecto a un eje de simetría, donde cada punto de *1 (la preimagen)* y *2* deben pertenecer a la misma perpendicular.

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan las preguntas en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Y mientras tanto en...

Ciencias 2 viste que la reflexión es un cambio de dirección en una onda electromagnética; por ejemplo, la reflexión del sonido y de la luz.

Individual

Dibuja las lunas de Valeria que se trasladan en la figura 9.2 y encuentra la directriz; toma la de la figura 9.1 como base:

a) ¿Cuál fue la medida de la directriz? ______

b) ¿Cuántas lunas se trasladaron? ______

c) Con el transportador mide cada ángulo utilizado para rotar la figura 9.1; haz las anotaciones correspondientes:

i) Ángulo luna *A*: ______

ii) Ángulo luna *B*: ______

iii) Ángulo luna *C*: ______

iv) Ángulo luna *D*: ______

d) ¿Cuál luna es una **simetría central**? ______

e) Reúnanse en parejas y comparen las respuestas. Escriban las diferencias entre simetría, rotación y traslación. ______

______

Glosario

simetría central: figura que ha sido rotada 180°.

¡Hazlo tú mismo!

1. En la figura 9.4 se muestra con el número 1 una imagen base, a la cual se aplicaron reflexión, rotación y traslación para obtener las identificadas como *a*, *b* y *c*. Escribe una V si el enunciado resulta verdadero y F si es falso:

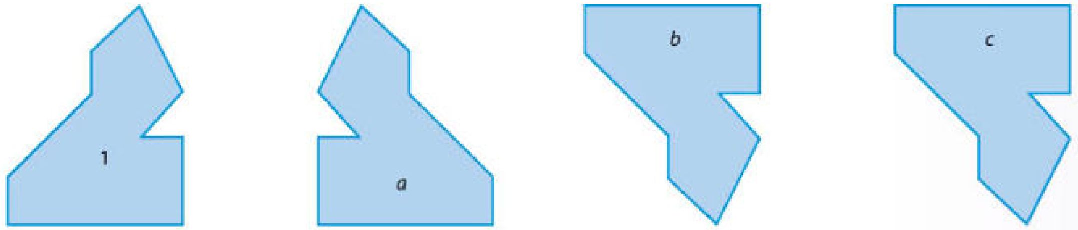


Figura 9.4

a) La figura 9.4*a* se obtiene con una reflexión de la imagen 1 respecto al eje de simetría vertical. ______

b) La figura 9.4*a* se obtiene con una rotación de la imagen 1 con un giro de 90°.

______

c) La figura 9.4*b* se obtiene con un giro de 180° aplicado en cualquier dirección a la 9.4*a*.

______

d) La figura 9.4*c* se obtiene al trasladar horizontalmente a la izquierda la 9.4*b*.

______

e) La figura 9.4*b* se obtiene al trasladar en cualquier dirección la 9.4*a*.

______

f) La figura 9.4*c* se obtiene al trasladar horizontalmente a la derecha la 9.4*b*.

______

2. Realiza la traslación de la figura 9.5 siguiendo la directriz de 6 cm que se indica:

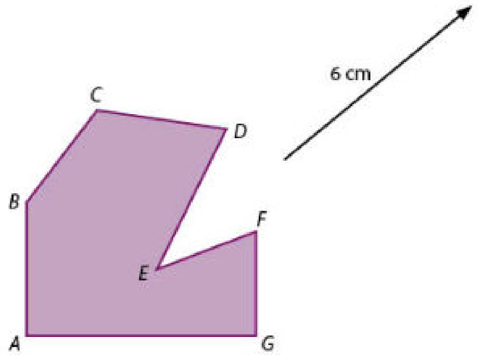


Figura 9.5

a) ¿Los puntos A-G quedaron en la misma posición? ______

¿Por qué? ______

______

b) Calcula el área de las figuras base y trasladada. ¿Qué observas? ______

______

c) ¿Cómo sería el perímetro de la figura? ______

3. En la figura 9.6 se muestra una rotación del cuadrilátero 9.6*a* al 9.6*b*.

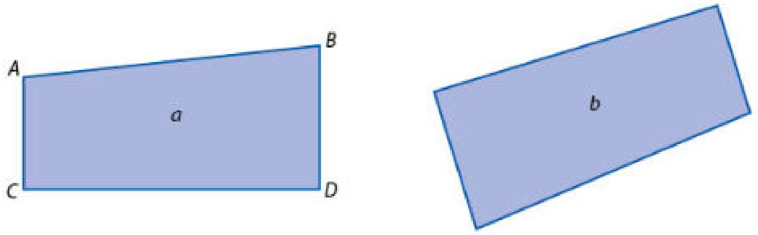


Figura 9.6

a) ¿Cuál es la medida del ángulo de rotación? ______

b) Escribe las letras que deben ir en el cuadrilátero 9.6*b*.

4. En la figura 9.7 se muestra un triángulo equilátero *ABC*.

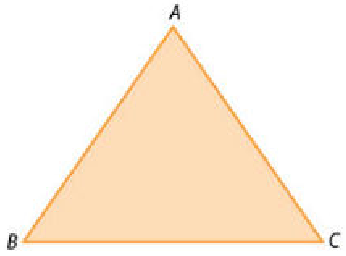


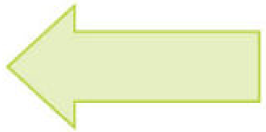
Figura 9.7

a) ¿Cómo comprobarías que el triángulo no tiene simetría central? Justifica la respuesta.

______

5. Para cada una de las imágenes de la figura 9.8 realiza en el cuaderno la rotación según los ángulos indicados:

a) 90° a la derecha.



b) 120° a la izquierda.

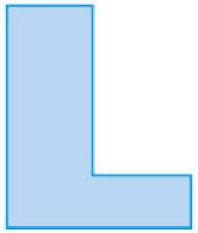


Figura 9.8

Lección 10

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Figuras y cuerpos.
Contenido: Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Composición de transformaciones geométricas

En la naturaleza hay muchos fenómenos asociados con la idea matemática de la simetría; encontramos esta propiedad en insectos, flores y copos de nieve, como se observa en la figura 10.1:

Figura 10.1

El ingenio ha hecho posible que este concepto matemático se refleje en ideas complejas que inciden en varios aspectos de la vida humana; por ejemplo, en el diseño de símbolos o construcciones arquitectónicas como los mostrados en la figura 10.2:

En contexto

La arquitectura mexicana comenzó a forjarse desde hace más de dos mil años y uno de los rasgos que le caracterizan es el uso de la simetría en los diseños. Con este principio se han construido una gran cantidad de sitios que la UNESCO ha declarado como patrimonio de la humanidad. Para echar un vistazo a esta hermosos diseños, que enriquecen la diversidad cultural, visita el siguiente sitio: http://www.visitmexico.com/es/arquitectura-mexicana
Encontrarás elementos prehispánicos, coloniales y contemporáneos.
¿En cuáles de ellos puedes reconocer una transformación geométrica?
(Consulta: 13 de enero de 2017)

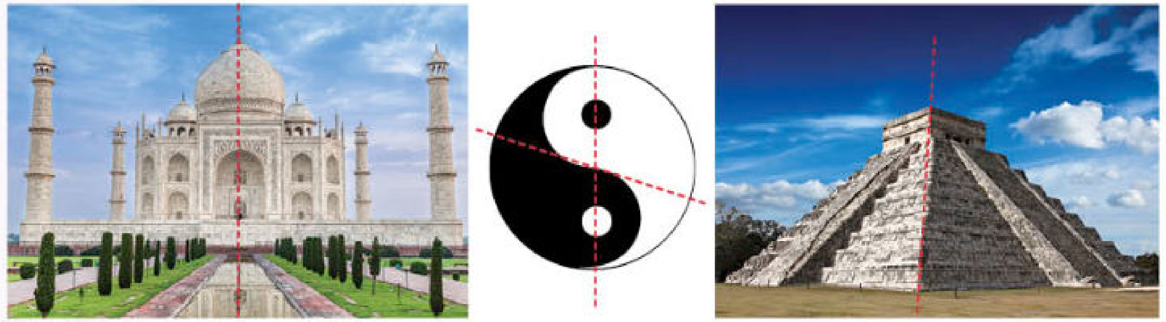


Figura 10.2 Taj Mahal, en Agra, India; símbolo del Yin-Yang, y pirámide de Kukulkán, en Chichén Itzá, México

Punto de partida

Rebeca diseña logotipos para revistas sobre naturaleza. Una de sus técnicas consiste en aplicar una rotación o traslación a las figuras iniciales y en ocasiones aplica simetría axial y central.

En las figuras 10.3, 10.4, 10.5 y 10.6 se muestran algunos bosquejos que Rebeca dejó inconclusos.

En las figuras 10.3 y 10.4 dibuja un bosquejo de la figura correspondiente que complete el proceso de transformación de las imágenes:

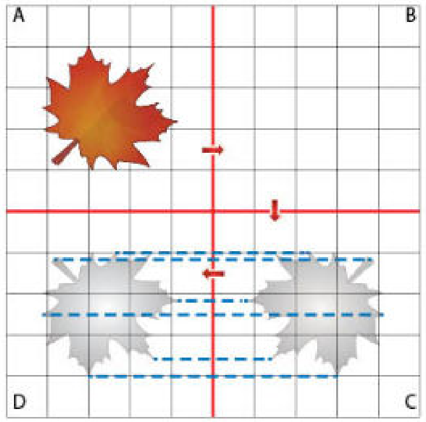


Figura 10.3

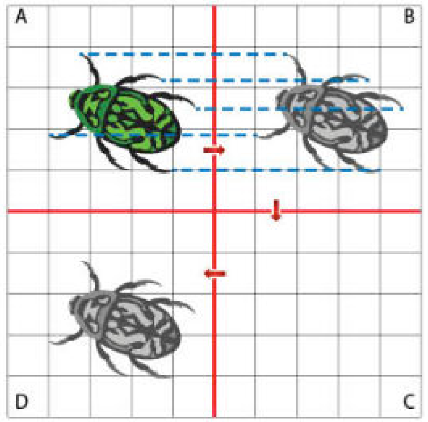


Figura 10.4

¿Qué tipo de cambio debe aplicarse a la hoja de maple original (*A*, figura 10.3) para obtener la correspondiente a *B* que, a su vez, permita la transformación de la figura en *C* y *D*?

____

a) Dibuja la figura *B* faltante (figura 10.3) y traza las líneas que permiten el cambio.
b) De acuerdo con las flechas que indican el orden de las transformaciones en la figura 10.4, ¿cuál debe aplicarse de *B* a *C* para obtener *D*? _______________
c) ¿Qué transformación permite en la figura 10.3 pasar de *A* hacia *D* directamente? _______ ¿Por qué? _______________

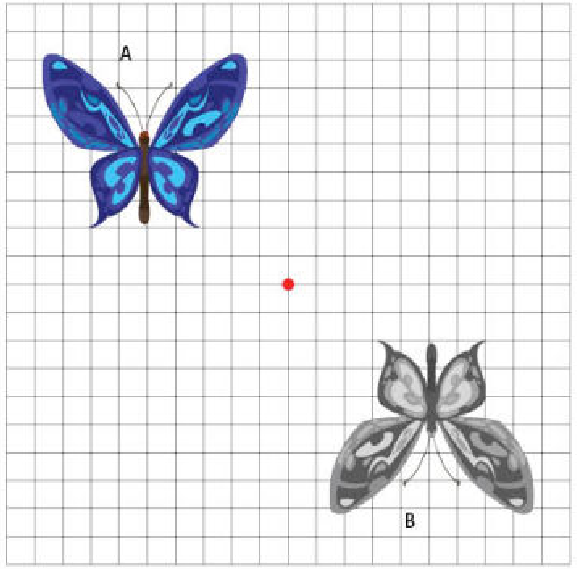


Figura 10.5

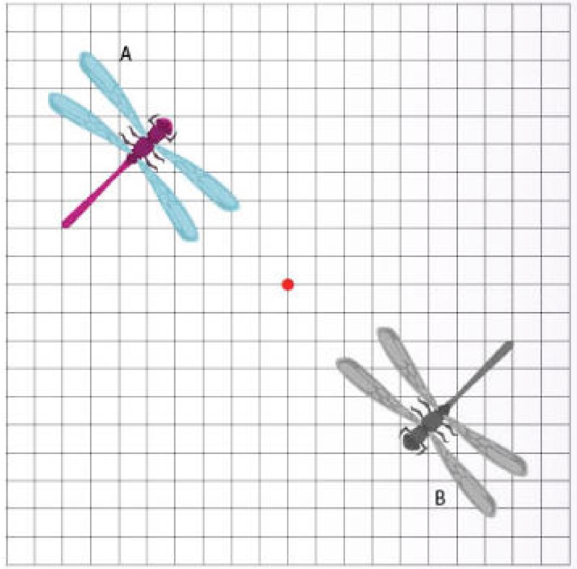


Figura 10.6

Glosario

simetría axial: es la existente respecto a un eje. Esta transformación asocia cada punto P con otro punto P, de tal modo que el segmento PP' es perpendicular al eje de simetría y, además, la distancia de P y P' al eje de simetría es igual.

simetría central: es la existente respecto a un punto fijo, llamado "centro de simetría". En ella se asocia cada punto P de la figura con otro punto P', de manera que P, O y P' están en línea recta y O es el punto medio de PP'.

Analiza las figuras 10.5 y 10.6:

a) ¿Qué tipo de transformación requiere Rebeca para obtener la mariposa *B* a partir de la *A* en la figura 10.5? ____________ ¿Por qué? ____________

b) ¿Alguna transformación distinta de la descrita en el inciso anterior permite obtener la mariposa *B* a partir de la *A*? ____________ ¿Por qué? ____________

c) ¿La figura 10.6 requiere la misma transformación que la 10.5? ____________
Argumenta matemáticamente por qué. ____________

d) Describe la transformación que se requiere aplicar para obtener la libélula *B* a partir de la *A*.

Reflexiona en torno de las siguientes preguntas: ¿Qué significa para ti la simetría axial? ¿Cuál es el significado de aplicar simetría central para transformar una figura?

En equipo

Reúnanse en equipos para desarrollar las siguientes actividades:

1. **Rebeca diseñó cuatro logotipos distintos. Describe en cada caso el procedimiento posiblemente usado para construirlos.**

Figura 10.7

Tipo de transformación utilizada: ____________

Descripción de la construcción: ____________

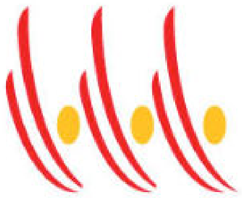


Figura 10.8

Tipo de transformación utilizada: ____________

Descripción de la construcción: ____________

Figura 10.9

Tipo de transformación utilizada: ____________

Descripción de la construcción: ____________

Figura 10.10

Tipo de transformación utilizada: ____________

Descripción de la construcción: ____________

a) Compartan con otros equipos sus descripciones. ¿Desarrollaron distintos procedimientos en alguno de los logotipos? ____________

b) ¿Es posible obtener alguno de los logotipos por distintas transformaciones? ____________
Expliquen matemáticamente la respuesta. ____________

En grupo

1. **Analicen de manera grupal la variante de un logotipo diseñado por Rebeca (figura 10.11). Luego, con la guía del profesor, contesten a partir de una lluvia de ideas:**

   a) ¿Es posible obtener el logotipo con un solo modo de transformación?

   b) Argumenten matemáticamente la respuesta anterior. ____________

   c) Describan el proceso de construcción del logotipo. ____________

Figura 10.11

2. **Analicen la estructura geométrica de la figura 10.12:**

   a) ¿Qué tipo de transformación se requiere para construirla? ____________

   b) Rebeca afirma que con rotación puede construirse esta estructura. ¿Es cierto eso? ______ Argumenten matemáticamente. ____________

   c) Ana, la amiga de Rebeca, afirma que es factible la construcción con simetría axial. ¿Es cierto eso? _____ Argumenten matemáticamente. ____________

   d) Juan Carlos, su compañero de trabajo, dice que con simetría central él podría obtener la figura. ¿Es cierto eso? ____________
   Argumenten matemáticamente. ____________

Figura 10.12

En equipo

Reunidos nuevamente en equipos, realicen las siguientes actividades:

1. **En el cuaderno dibujen un polígono regular.**

   a) Apliquen una traslación para obtener una figura congruente. Repitan el proceso hasta donde permita la hoja.

   b) Coloreen con tonos distintos cada figura del diseño.

   c) De las figuras dibujadas, seleccionen una representativa del equipo.

   d) Muéstrenla a otros equipos y observen las de los demás. ¿Son exactamente iguales? ____________ ¿Por qué? ____________

TIC y más

En la siguiente página encontrarás todos los logotipos de los juegos olímpicos de la historia moderna:
http://itibonzi.blogspot.mx/2012/07/logotipos-de-los-juegos-olimpicos-2012.html
(Consulta: 13 de enero de 2017)
¿En cuáles de ellos reconoces transformaciones geométricas?
¿De qué tipo son y cómo se aplican?

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

2. Dibujen una figura distinta de la anterior. Apliquen una transformación diferente, o bien, la combinación de varias para obtener un diseño especial.

a) Coloreen su diseño y al terminar péguenlo en una pared del salón.

b) Observen los distintos diseños.

c) ¿Hay algunos parecidos al de los integrantes del equipo? ______

¿En qué se parecen? ______

¿En qué son distintos? ______

¡Ya lo aprendimos!

Un mosaico puede construirse a partir de la combinación de transformaciones geométricas realizadas de manera periódica; por ejemplo, los famosos mosaicos de Roger Penrose, físico-matemático inglés que estudia desde 1974 las propiedades matemáticas de los teselados (figura 10.13).

Figura 10.13

¡Hazlo tú mismo!

1. María ha encontrado una fotografía antigua del piso de la casa de su abuela. La imagen se muestra en la figura 10.15.

a) Dibuja en el cuaderno la figura principal a partir de la cual se obtiene el mosaico.

b) Argumenta matemáticamente el proceso de construcción que permite obtener un mosaico como el de la fotografía.

______

Figura 10.15

¡Qué curioso!

El *Vochol* es un auto sedán decorado con 2 200 000 cuentas de vidrio al estilo de la cultura huichol. Los patrones geométricos le han dado fama mundial.

¿Qué tipo de transformaciones geométricas reconoces en el diseño? ______

______

______

2. Analiza los siguientes logotipos (figura 10.16) y explica en cuáles se han aplicado una o varias transformaciones geométricas para obtener el diseño:

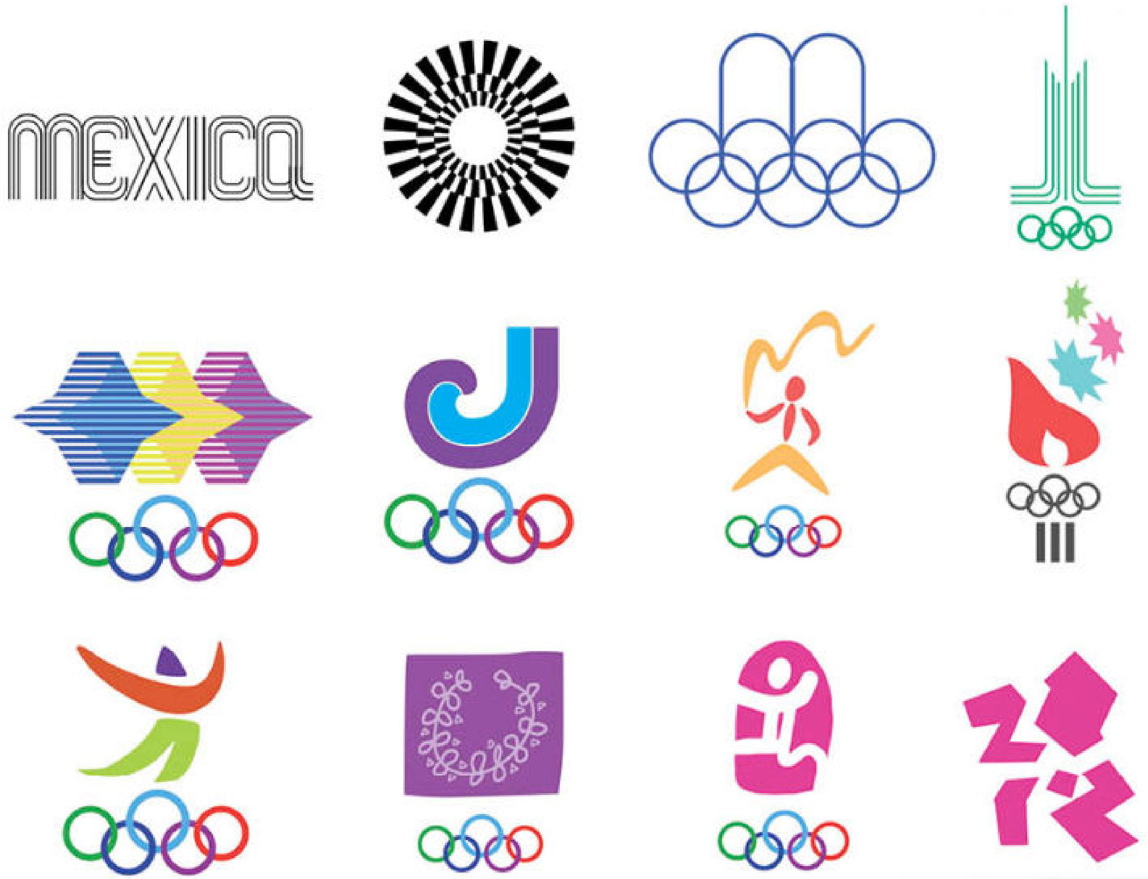


Figura 10.16

3. A partir de la figura 10.17 dibuja en el cuaderno un mosaico mediante una, varias o la combinación de distintas transformaciones:

a) Encuentra un diseño distinto al de tu primer mosaico.

b) Explica las semejanzas y las diferencias obtenidas en ambos mosaicos.

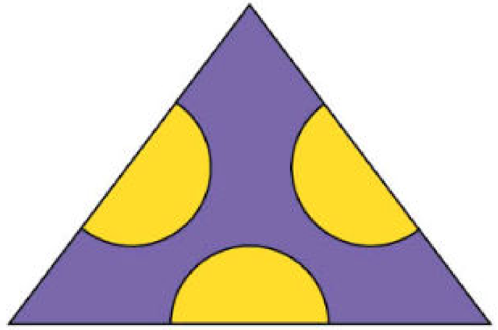


Figura 10.17

Lección 11

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.
Contenido: Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

¿Áreas iguales?

El concepto de área se utiliza con frecuencia en la vida cotidiana; sin embargo, se desconoce su origen exacto, pues es tan antiguo como la humanidad misma. No surgió por capricho u ocurrencia sino por las necesidades prácticas de cuantificar cubrimientos.

En esta lección analizarás las relaciones entre las áreas de los cuadrados construidos en cada lado de un triángulo rectángulo.

Punto de partida

El departamento de publicidad de cierta empresa solicitó a un diseñador gráfico realizar el logotipo para una nueva marca comercializadora de material didáctico de matemáticas. Si presentó un diseño con un triángulo y en cada lado de éste dibujó tres polígonos irregulares como muestra la figura 11.1, ¿qué relación hay entre las áreas de los polígonos irregulares?

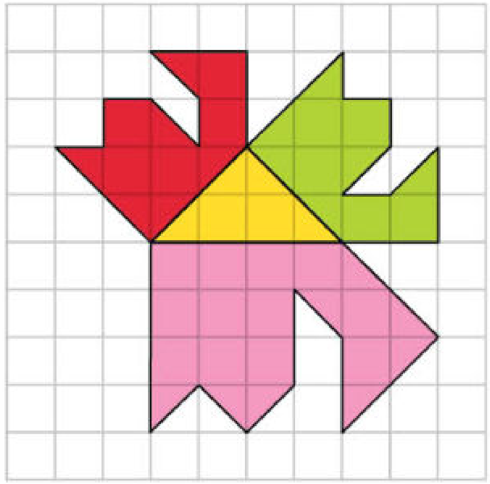


Figura 11.1

Mide con una regla los lados y con un transportador los ángulos, y responde:

a) De acuerdo con los ángulos del triángulo; ¿qué tipo de triángulo contiene el diseño? ______

b) Si los tres polígonos irregulares tienen diferente tamaño pero la misma forma, ¿cómo son entre sí los lados? ______ ¿Cómo son entre sí sus ángulos? ______

Intenta calcular el área de los polígonos dibujados en cada lado del triángulo.

a) ¿Cómo puedes encontrar el área? ______

b) ¿Qué necesitas para calcular el área de cualquier figura? ______

En contexto

Una de las funciones de la publicidad es comunicar y para lograrlo se utilizan diferentes logotipos e isotipos. Un isotipo se refiere a la parte simbólica o icónica, sin necesidad de acompañar ningún texto; como en la nueva línea 12 del del Sistema de Transporte Colectivo Metro de la ciudad de México, que instaló señales e iconos de las estaciones en tercera dimensión, como apoyo para débiles visuales y sordomudos, entre otras personas con discapacidad.

Acuérdate de...

Una figura es semejante a otra cuando tienen los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales.

c) Si no tienes la medida de los lados, ¿cómo calcularías el área? ______

Si se traza una cuadrícula sobre el diseño como muestra la figura 11.1 puede calcularse el área pedida.

Observa la figura 11.1 y encuentra el área expresada en unidades cuadradas de cada uno de los polígonos irregulares:

a) Área del rosa: ______

b) Área del verde: ______

c) Área del rojo: ______

Con la guía del profesor, analicen y respondan:

a) ¿Cómo es el área de la figura mayor respecto a la suma de las otras dos? ______

b) ¿Crees que esto suceda en otros casos? ______ ¿Cómo puedes comprobarlo? ______

Aprendemos

Acuérdate de...

El área de un polígono es la medida de la superficie delimitada por sus lados y se expresa en unidades cuadradas.

En pareja

Reúnanse en parejas y realicen las siguientes actividades para comprobar si el área de figuras semejantes dibujadas en cada uno de los lados de un triángulo guarda cierta relación:

1. **Reproduzcan en una hoja cuadriculada la figura 11.2.**

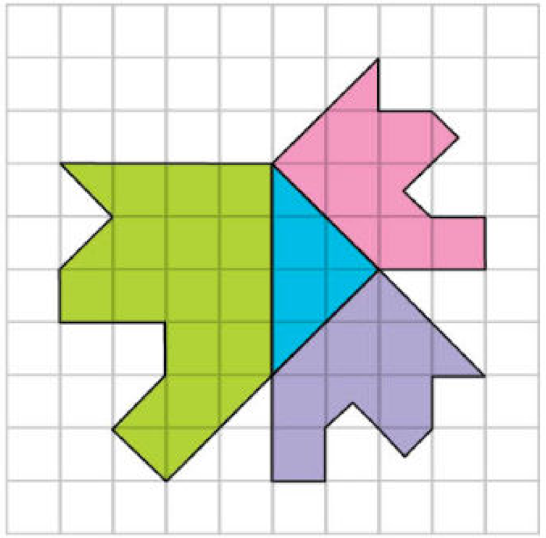


Figura 11.2

2. **Recorten los *decágonos* ("polígonos de 10 lados") irregulares y fraccionen de tal manera que obtengan tres cuadrados cuyas dimensiones sean la medida de los lados del triángulo.**

3. **Respondan las siguientes preguntas:**

a) ¿Qué dimensiones en unidades lineales tiene el cuadrado que resulta del polígono verde? ____________________

¿Cuál es el área en unidades cuadradas? ____________________

b) ¿Cuál es el área del rosa? ____________________

c) ¿Cuál es el área del morado? ____________________

d) ¿Qué relaciones hay entre las áreas de los tres polígonos?

____

e) ¿Qué tipo de triángulo se muestra en la figura? ____________________

Glosario

triángulo rectángulo: es el que tiene un ángulo recto, de 90°, y dos agudos.

Intenten superar el siguiente reto, conocido como "rompecabezas de Henry Perigal":

4. **Tracen en cualquier material (cartulina, papel cascarón, *foami*) un triángulo rectángulo y nombren al lado mayor *c* y los restantes *a* y *b*, como muestra la figura 11.3.**

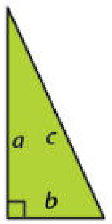


Figura 11.3

Acuérdate de...

La diagonal de un cuadrilátero es el segmento que une dos vértices opuestos.

La bisectriz es una recta que divide en dos partes iguales el ángulo. En un cuadrado, las bisectrices y las diagonales coinciden.

5. **Tracen cuadrados en cada uno de los lados del triángulo y dibujen las bisectrices del cuadrado que resultó del lado *a*; localicen el centro del cuadrado y asígnenle la letra *d* (figura 11.4).**

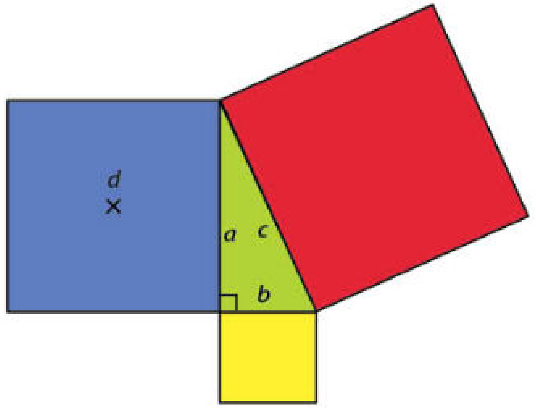


Figura 11.4

6. **Tracen dos rectas que pasen por el punto *d*: una paralela al lado *c* del triángulo y la otra paralela al costado del cuadrado del mismo lado *c*. (figura 11.5).**

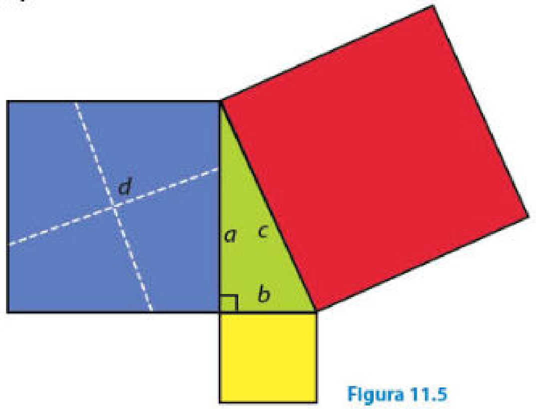


Figura 11.5

7. **Recorten los cuatro cuadriláteros formados en dicho cuadrado y también recorten el cuadrado del lado *b* (figura 11.6).**

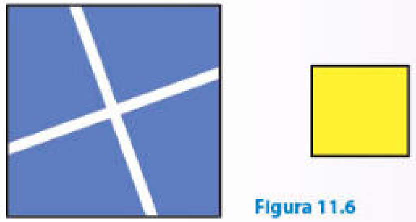


Figura 11.6

8. **Respondan las siguientes preguntas:**

a) ¿Con las figuras recortadas puede cubrirse toda la superficie del cuadrado del lado "c"? ____________ ¿Por qué creen que sucede esto? ____________

____

b) ¿Sucederá lo mismo con otro tipo de triángulos? ____________________

c) Expresen en un enunciado la relación recién encontrada. ____________________

____

9. **Compartan sus respuestas con el resto del grupo y, con la guía del profesor, den una conclusión.**

¡Ya lo aprendimos!

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado del lado de mayor longitud es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados menores del triángulo, los cuales conforman el ángulo recto; estos se llaman "catetos", mientras que el lado opuesto a ese ángulo, "hipotenusa" (figura 11.7).

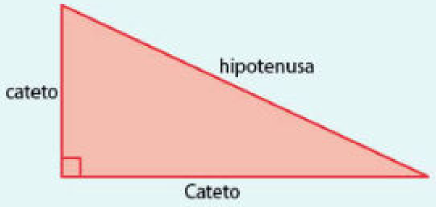


Figura 11.7

¡Qué curioso!

Un gran aficionado a los rompecabezas geométricos

El británico Henry Perigal dedicó muchos años de su larga vida a demostrar con la técnica de disección teoremas geométricos como el "de los tres cuadrados", el cual se publicó en *The Messenger of Mathematics* (1874) y se encuentra grabado en piedra en la lápida de su tumba, en Wennington (Essex, Inglaterra).

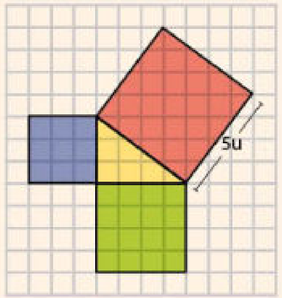
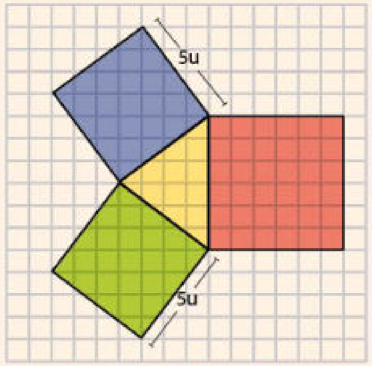
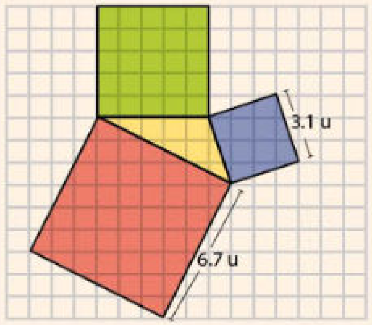
Tomado de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3402&directory=67

(Consulta: 24 de enero de 2017)

En equipo

Reúnete en equipo y averigua si en cualquier triángulo al sumar las áreas de los cuadrados menores el resultado puede ser igual al área del cuadrado mayor.

1. **Observen cada una de las figuras y completen la tabla:**

Figura	Suma de las áreas de los cuadrados con las medidas de los lados menores	Área del cuadrado con la medida del lado mayor	Nombre del triángulo por la medida de los lados	Nombre del triángulo por la medida de los ángulos
 Figura 11. 8				
 Figura 11. 9				
 Figura 11. 10				

2. **¿En qué triángulos se cumple lo siguiente?**

a) La suma de las áreas de los cuadrados construidos con la medida de los lados menores es igual al área del cuadrado construido con la medida del mayor.

Y si el triángulo no es rectángulo, ¿se cumple la afirmación?

b) Investiguen de qué depende que el área de un cuadrado sea superior, inferior o igual a la suma de las áreas de los otros dos.

c) Escriban una conclusión acerca de la relación encontrada.

¡Ya lo aprendimos!

El triángulo es rectángulo si la suma del cuadrado de los catetos equivale al cuadrado de la hipotenusa.

El triángulo es obtusángulo si el área del cuadrado sobre la hipotenusa es mayor que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

El triángulo es acutángulo si el área del cuadrado sobre la hipotenusa es menor que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

¡Hazlo tú mismo!

De manera individual resuelve los siguientes problemas:

1. **En un triángulo rectángulo, los cuadrados de los dos lados que forman el ángulo recto tienen un área de 1 600 cm^2 y 81 cm^2:**

a) ¿Cuánto mide el lado de mayor longitud?

b) ¿Qué área tiene el cuadrado cuyo lado es mayor?

2. **El carpintero termina una ventana y toma las medidas para saber si le ha quedado bien; de largo tiene 120 cm y de ancho 80 cm, mientras que la diagonal es de 145 cm (figura 11.11).**

a) ¿El marco de la ventana es rectangular?

b) ¿Está bien construida la pieza?

¿Por qué?

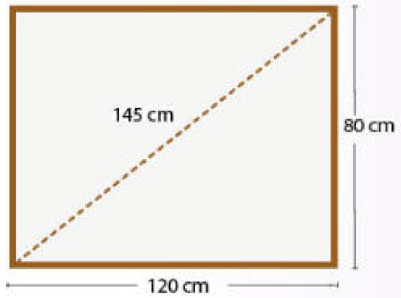


Figura 11. 11

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Caja de herramientas

Comprueba con programas de geometría dinámica la relación existente entre los triángulos y el cuadrado que resulta de sus lados. Este enlace corresponde a un programa gratuito ejecutable de manera directa desde el navegador:
http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html
(Consulta: 13 de enero de 2017)

3. **En la figura 11.12, el área de cada triángulo morado es de 2 cm²; ¿qué área tienen los cuadrados verdes?** ______

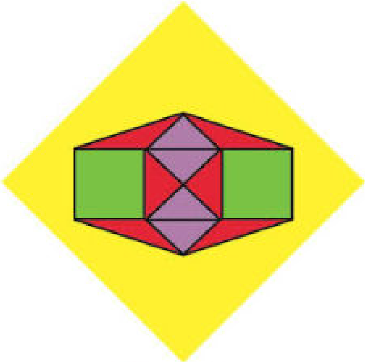


Figura 11. 12

4. **Diego propone el siguiente reto a su amigo Lalo: tres cuadrados se construyen en cada lado de un triángulo rectángulo; si el menor tiene un área de 25 cm² y el mayor 169 cm² (figura 11.13), ¿cuánto debe medir el área del cuadrado faltante?** ______

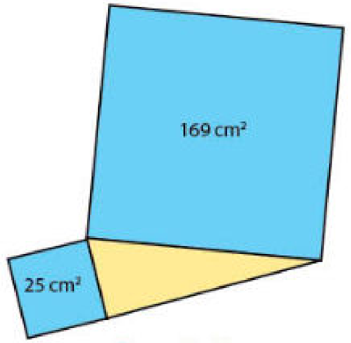


Figura 11. 13

5. **Encuentra el área faltante en las figuras 11.14 y 11.15:**

Valor de $\pi \approx 3.14$

a) Área azul: ______

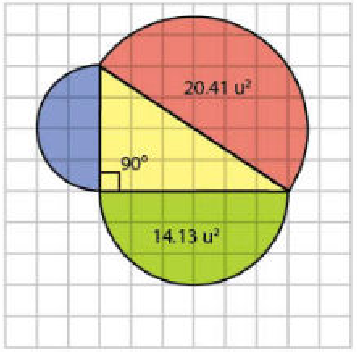


Figura 11. 14

b) Área roja: ______

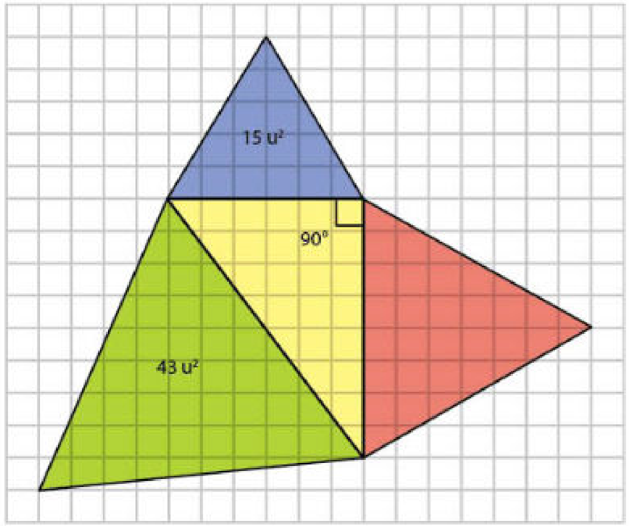


Figura 11. 15

6. **Un parque con forma de triángulo rectángulo se construye alrededor de tres lozas de cemento cuadradas. Si las medidas de aquél son 30, 40 y 50 metros de lado, como muestra la figura 11.16, ¿cuánto mide el área de cada loza?**

______

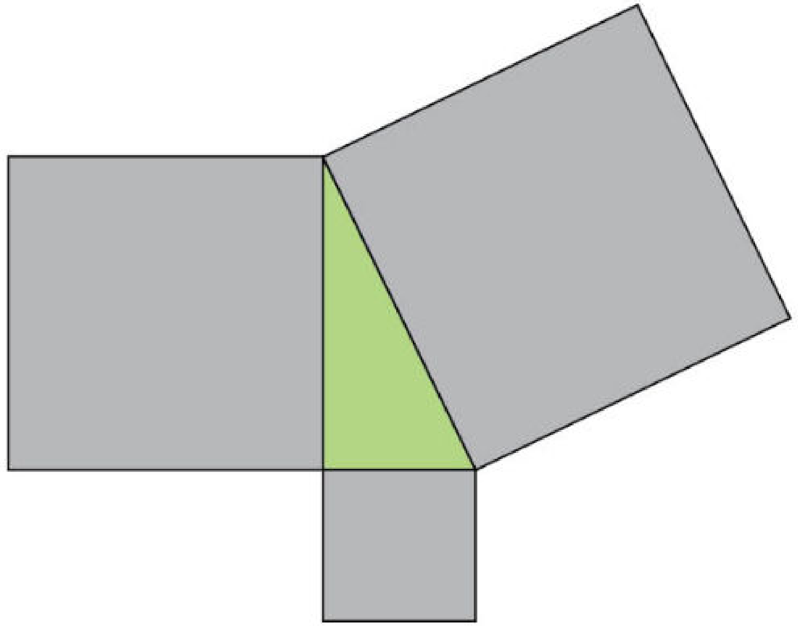


Figura 11. 16

Lección 12

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.
Contenido: Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Un famoso teorema

¿Alguna vez has escuchado hablar del teorema de Pitágoras?

En la lección anterior lo utilizaste, aunque no con este nombre, al encontrar la relación entre las áreas de los cuadrados construidos en cada lado de un triángulo rectángulo. Sin duda, es no sólo el teorema más conocido sino el más usado por su aplicación de análisis geométrico en diferentes áreas del conocimiento. Representa una herramienta importante para calcular ángulos, áreas, distancias o alturas.

En esta lección formalizarás el teorema y verás algunas de sus aplicaciones.

¡Qué curioso!

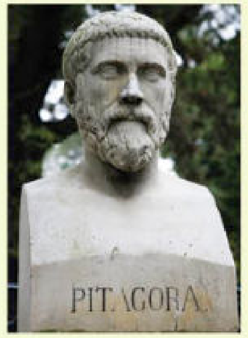


Figura 12.1 Pitágoras de Samos.

Pitágoras. Nació cerca de 569 antes de nuestra era en Samos, Jonia, y murió cerca de 475 antes de nuestra era. Descrito con frecuencia como el primer matemático puro, representa una figura en extremo importante en el desarrollo de las matemáticas, aunque se conoce relativamente poco de sus logros matemáticos.

http://www.ugr.es/~eaznar/pitagoras.htm

(Consulta: 24 de enero de 2017)

Punto de partida

En un hospital se necesita construir una rampa de acceso de acuerdo con la norma oficial mexicana NOM-233-SSA1-2003, que establece los requisitos arquitectónicos para facilitar el acceso, el tránsito, el uso y la permanencia de las personas con discapacidad.

En la figura 12.2 se muestra una vista lateral del lugar. Si desde el borde del segundo escalón hasta la jardinera hay un espacio de 10 m, ¿cuál será la nueva amplitud del espacio cuando termine de construirse la rampa, cuya longitud es de 4.01 m y si cada escalón tiene 20 cm de alto?

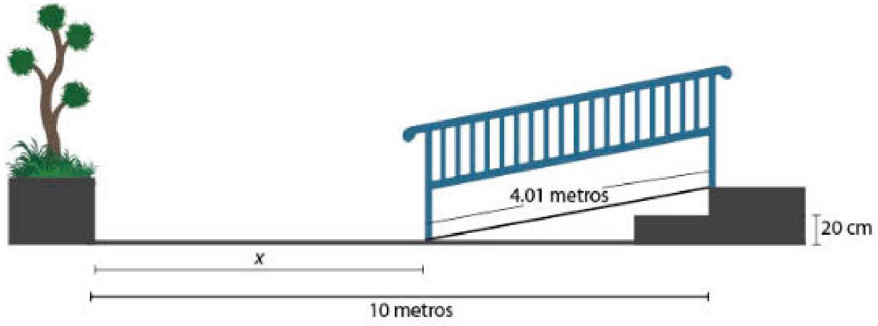


Figura 12.2

¿Cómo resolverías el problema? __________

Observa la figura 12.3:

Figura 12.3

Acuérdate de...

1 metro equivale a 100 centímetros (1 m = 100 cm)

a) Observa el triángulo amarillo que forma la rampa, ¿para qué te sirve poner atención en esta parte del diseño?

b) ¿Cómo puedes encontrar la base y la altura del triángulo?

c) ¿Cuánto miden los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo? Expresa los resultados en centímetros para tener una misma unidad de medida.

hipotenusa: ______ cateto: ______ cateto: ______

Comenta con los compañeros y el profesor qué estrategia utilizaron para resolver el problema.

TIC y más

Las demostraciones del teorema de Pitágoras son innumerables, pues en ciertas épocas para optar al grado de maestro había que presentar una demostración geométrica original. Entra en el sitio siguiente y comprueba este teorema:

http://matematicascercanas.com/2016/06/06/demostraciones-teorema-de-pitagoras/

(Consulta: 13 de enero de 2017)

Aprendemos

Individual

Seguramente habrás escuchado el nombre de Pitágoras, pues se le considera uno de los grandes matemáticos griegos. El problema anterior y muchos más se resuelven con el teorema atribuido a él. Aunque se llama "teorema de Pitágoras", ¡también lo conocían los matemáticos indios, griegos, chinos y babilonios antes que él viviera!

Acuérdate de...

Propiedad distributiva y factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

Realiza cada una de las siguientes indicaciones y demuestra el teorema de Pitágoras:

1. **En una hoja de color traza un triángulo rectángulo como aparece en la figura 12.4. Si tienes un triángulo rectángulo cuyas medidas desconoces, asigna las variables "a" y "b" a los catetos y "c" a la hipotenusa.**

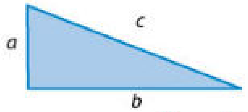


Figura 12.4

2. **Coloca copias del mismo triángulo rectángulo, de tal manera que al girarlas 90° respecto a la anterior formes un cuadrado (figura 12.5).**

a) ¿Cómo son los triángulos entre sí? ______

b) ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado mayor? ______

c) ¿Qué área tiene este cuadrado? ______

d) ¿Qué relación tiene el cuadrado interior (blanco) con el primer triángulo (figura 12.4)? ______

e) Indica el área de cada triángulo rectángulo. ______

f) ¿El área del cuadrado blanco es c^2? ______ Justifica la respuesta. ______

g) Para obtener el área total suma las correspondientes a los cuatro triángulos rectángulos y la del cuadrado blanco. ______

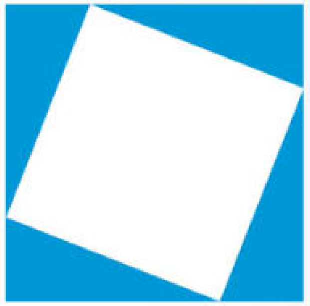


Figura 12.5

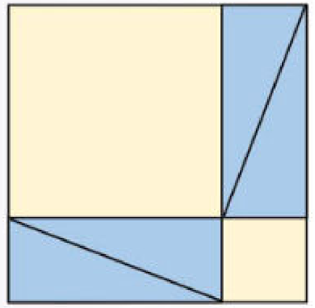


Figura 12.6

3. **Nombra esta expresión con el número (1).**

4. **Observa en la figura 12.6 que en el interior del cuadrado mayor se movieron los triángulos para formar dos rectángulos y dos cuadrados.**

   a) ¿Cambiaron las medidas del cuadrado mayor? ______________
   Justifica la respuesta. ______________

   b) ¿Cuál es el área de ambos rectángulos? ______________
   c) ¿Cuál es el área de ambos cuadrados? ______________
   d) ¿Cuál es el área total? ______________

5. **Nombra esta expresión con el número (2).**
6. **Iguala las expresiones (1) y (2).** ______________
7. **Reduce términos semejantes.** ______________
8. **Comenta con los compañeros y el profesor la conclusión a que llegaron.**

En equipo

En equipo y con ayuda de algún programa de geometría dinámica

1. **Construyan tres triángulos donde utilicen como ángulo recto la intersección de los ejes.**
2. **Completen la siguiente tabla colocando las longitudes de los catetos y la longitud de la hipotenusa:**

Triángulo	Cateto *a*	Cateto *b*	Hipotenusa *c*	$a^2 + b^2 = c^2$
1				
2				
3				

Tabla 12.1

3. **Con los compañeros y el profesor debatan sobre lo siguiente:**

   a) Si multiplico la terna (*a*, *b* y *c*) por algún número natural, ¿sigue cumpliéndose el teorema? ______________
   b) ¿Se cumple el teorema de Pitágoras en triángulos que no son rectángulos? ______________ ¿por qué? ______________

¡Qué curioso!

Pitágoras con ritmo

Los Top-Son, igual que otros grupos de rock en el periodo 1960-70, interpretaron la canción Pitágoras. Si quieres escucharla entra en http://youtu.be/Ufq_evW8tqU (Consulta: 24 de enero de 2017)

TIC y más

Utilicen el programa GeoGebra, en http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html, para verificar que se cumple el teorema de Pitágoras; ayúdense con una hoja de cálculo. (Consulta: 24 de enero de 2017)

¡Ya lo aprendimos!

En la figura 12.7 se establece que los catetos tienen longitudes *a* y *b*, y la medida de la hipotenusa es *c*; se deduce que

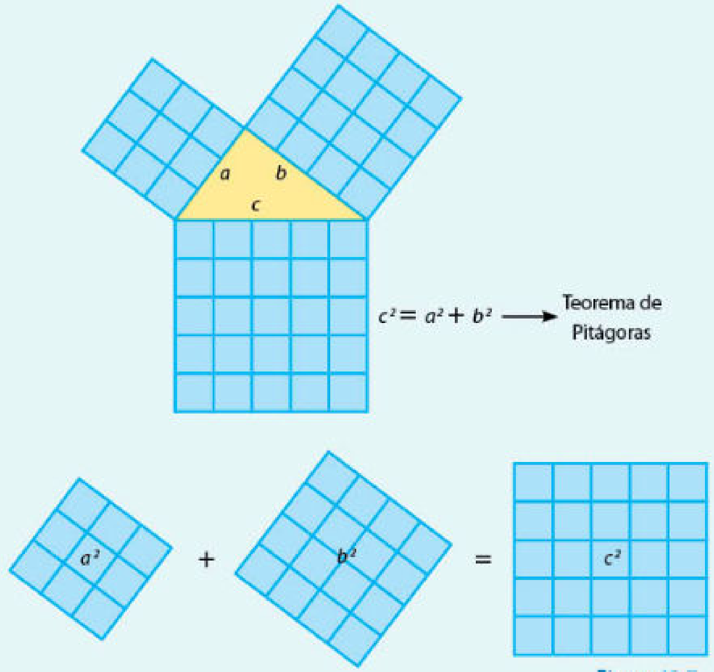


Figura 12.7

Si retomamos el problema de la sección Punto de partida (figuras 12.2 y 12.3) y expresamos las medidas en centímetros, entonces al aplicar el teorema de Pitágoras tenemos lo siguiente:

$a = 40$ $\quad$ $b = ¿?$ $\quad$ $c = 401$

Sustituimos en $c^2 = a^2 + b^2$

$$401^2 = 40^2 + b^2$$

Despejamos el valor de "b":

$$b^2 = 401^2 - 40^2$$

Resolvemos:

$$b^2 = 160\,801 - 1\,600$$

$$b^2 = 159\,201$$

Encontramos raíz cuadrada en ambos miembros $b = 399$. Por tanto, la rampa tendrá 399 cm de base; es decir, 3.99 m.

¡Qué curioso!

Homero Simpson y el teorema de Pitágoras

Henry Kissinger (secretario de estado de Estados Unidos durante las presidencias de Richard Nixon y Gerald Ford) visita la planta nuclear de Springfield, donde pierde los anteojos; éstos aparecen en el baño de la planta. Homero los encuentra y se los pone; con aires de intelectual, recita: "La suma de las raíces cuadradas de dos lados de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del lado restante."

Desde uno de los compartimientos cierta voz corrige: "¡Eso es el triángulo equilátero!"

¿En qué se equivoca?

En realidad, el enunciado resulta falso en ambos casos. Homero parece recitar un mal aprendido teorema de Pitágoras: en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Tomado de http://aprendomates.wordpress.com/category/uncategorized/

(Consulta: 13 de enero de 2017)

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Hazlo tú mismo!

1. Resuelve de manera individual el problema siguiente:

En últimas noticias: Un automovilista pierde el control del vehículo y choca contra un poste de teléfono; por fortuna sólo hubo daños materiales. A una distancia de 8 m del mástil se encontraba una casa con 6 m de altura; la punta de éste quedó como muestra la figura 12.8:

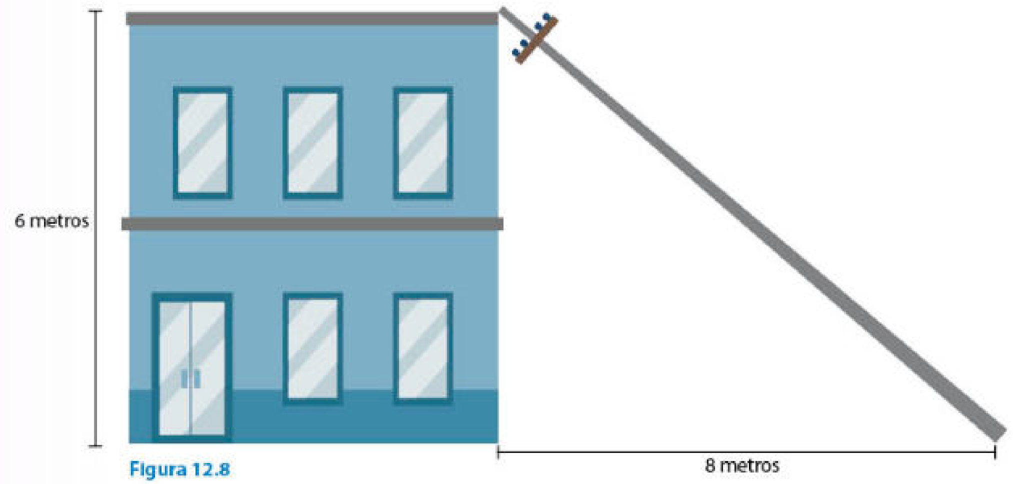


Figura 12.8

a) Si utilizas el teorema de Pitágoras, ¿qué dato falta? ______________________

b) ¿Qué harías para obtenerlo? ______________________

c) ¿Qué altura tiene el poste? ______________________

TIC y más

En infinidad de problemas se aplica este teorema. El sitio siguiente presenta una demostración y una de tantas aplicaciones: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras-demo.html

(Consulta: 24 de enero de 2017)

2. Calcula las longitudes faltantes en los triángulos rectángulos de la figura 12.9:

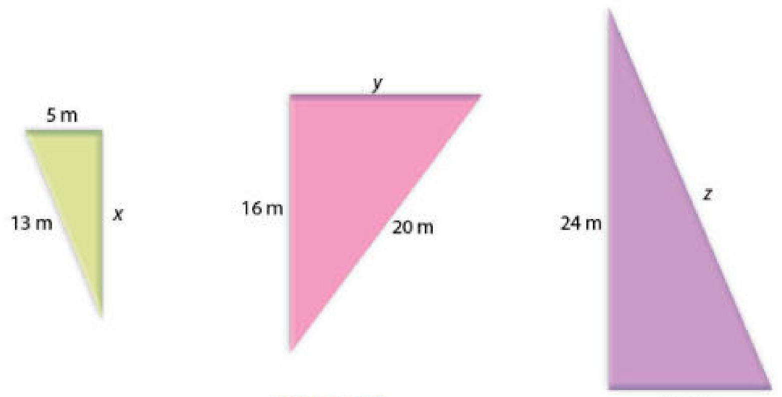


Figura 12.9

a) Lado $x =$ __________ *b)* Lado $y =$ __________ *c)* Lado $z =$ __________

3. Resuelve los siguientes problemas:

a) Cierto agricultor quiere cercar con alambre la diagonal de un terreno rectangular de 35 m de ancho y 85 m de largo (figura 12.10). ¿Cuántos metros de ese material debe comprar? ______________________

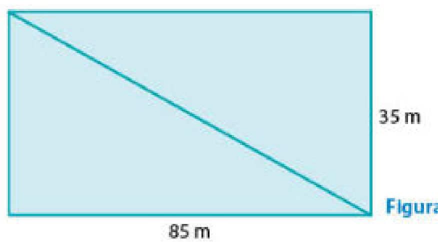


Figura 12.10

b) Calcula la altura del Ángel de la Independencia. Considera los datos de la figura 12.11:

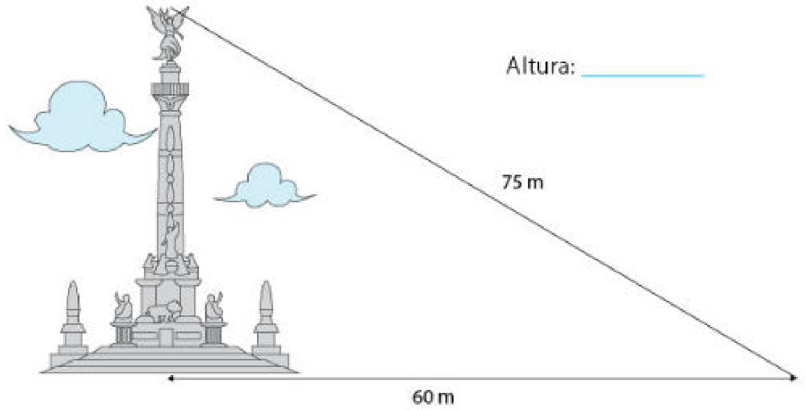


Figura 12.11

En contexto

El teorema de Pitágoras es útil para para calcular ángulos, áreas, distancias o alturas, aplicables en muchos casos de la vida diaria, como en la construcción de rampas de hospitales, andadores o edificios públicos, entre otros equipamientos e infraestructura, que ayudan a las Personas con Discapacidad, mejoran su situación de vida y contribuyen a la igualdad de oportunidades.

c) Se quiere sujetar un poste con cable de acero, amarrado desde 3 m abajo de la punta del mástil; si éste tiene una longitud de 10 m y hay sólo 17 m de cable (figura 12.12), ¿a qué distancia aproximada de la base debe perforarse el piso para asegurarlo?

____

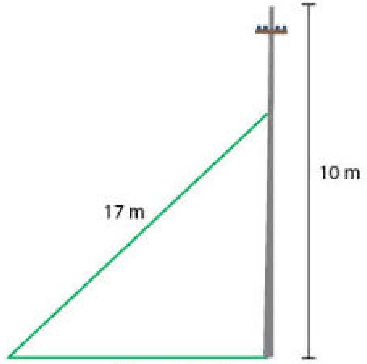


Figura 12.12

Lección 13

Eje: Manejo de la información.
Tema: Nociones de probabilidad.
Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

La probabilidad nace en el contexto de los juegos de azar. Muchos de los sorteos y concursos difundidos en medios como la televisión, la radio e internet –ruletas, sorteos o pronósticos sobre resultados deportivos, por ejemplo– funcionan de manera que se calculan previamente las probabilidades reales de que un concursante gane, las cuales la mayoría de las veces resultan escasas.

En esta lección estudiarás varios experimentos e identificarás las situaciones donde se debe distinguir cuándo dos eventos son o no mutuamente excluyentes; y calcularás la probabilidad correspondiente.

Punto de partida

En cierta feria hay una ruleta como la mostrada en la figura 13.1. Según los puntos que obtengan, los concursantes pueden recibir determinado premio.

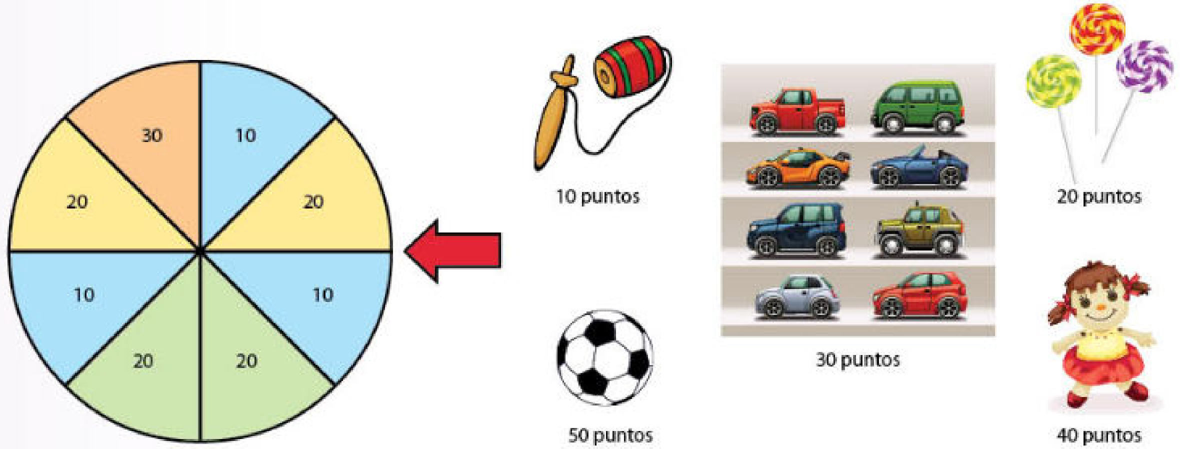


Figura 13.1

Antonio compró una ficha para jugar, con una sola oportunidad para hacer girar la ruleta.

a) ¿Cuáles resultados puede obtener? __________

b) ¿Cuál premio tiene la mayor probabilidad de obtener Antonio? Explica por qué. __________

c) ¿Cuál es el espacio muestral que corresponde a girar la ruleta una sola vez? __________

d) ¿Qué resultado es más probable de obtener, 20 puntos o color verde? __________

Gabriela compra una ficha para jugar, pero con dos oportunidades para hacer girar la ruleta. En este caso, los valores que obtengan en ambas oportunidades se suman.

a) ¿Cuáles resultados puede obtener? __________

Acuérdate de...

Si un proceso genera un resultado u observación que depende del azar, se dice que es aleatorio.
Un experimento aleatorio tiene varios resultados posibles, cuyo conjunto se denomina *espacio muestral*; por ejemplo, el correspondiente a lanzar una moneda (no cargada) es el conjunto formado por dos resultados: {águila, sol}.

b) ¿Cuál premio tiene la menor probabilidad de obtener Gabriela? __________
Explica por qué. __________

c) ¿Cuál es el espacio muestral que corresponde a girar la ruleta en dos oportunidades? __________

d) ¿Qué resultado es más probable de obtener en dos oportunidades, 50 puntos o color azul en ambas? __________

e) Si Gabriela obtiene 10 puntos en la primera oportunidad, ¿cuál es el resultado más probable de obtener en la segunda? __________
Explica por qué. __________

Con otros compañeros comparen sus respuestas. Comenten cómo obtuvieron la probabilidad en los diferentes casos.

En contexto

México es un país rico en tradiciones, folclor y cultura. Una de las expresiones de las culturas regionales más difundida son las ferias. La tradición festiva de las ferias tiene su origen en el México prehispánico y su principal actividad ha sido el intercambio mercantil. Las ferias de pueblo son una clara muestra de la diversidad cultural y de culto, enmarcadas por festividades cívicas o religiosas que activan la economía de las regiones; ¡además son muy divertidas!, ¿no te parece así?

Aprendemos

Individual

Llamemos *experimento I* el juego de Antonio (girar la ruleta en una oportunidad); y *experimento II*, el de Gabriela (ponerla en movimiento un par de veces).

Para ambos experimentos, considera los siguientes eventos:

Evento A: Obtener 10 puntos.

Evento B: Obtener 20 puntos.

Evento C: Obtener 30 puntos.

Evento D: Caer en color azul.

Evento E: Caer en color amarillo.

Evento F: Caer en color naranja.

Acuérdate de...

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral.
Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, el espacio muestral corresponde al conjunto formado por todos los posibles resultados: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. El evento M: "obtener un número par" es el subconjunto formado por los resultados favorables: {2, 4, 6}.

1. **Antonio juega la ruleta y lo único que no quiere como premio es la paleta. Como el evento B está asociado a ganarla, llamemos B′ al evento contrario: no obtener 20 puntos.**

a) ¿Cuántos casos favorables tiene el evento B? __________ Calcula la probabilidad de que ocurra B:
P(B) =

b) ¿Cuántos casos favorables tiene el evento B′? __________ Calcula la probabilidad de que ocurra B′:
P(B′) =

c) ¿Cuánto suman los casos favorables correspondientes a los eventos B y B′? Compara esta adición con el espacio muestral correspondiente al experimento I. ¿Cómo son entre sí estas cantidades? __________

Acuérdate de...

La fórmula para calcular la probabilidad P de que ocurra un evento E es

$$P(E) = \frac{\text{resultados favorables}}{\text{resultados posibles}}$$

Acuérdate de...

En un experimento, si los resultados favorables para dos eventos difieren, decimos que éstos son **mutuamente excluyentes**.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado (no cargado) puede ocurrir alguno de los siguientes eventos:

A: "se obtiene número par".

B: "se obtiene número impar".

Observa que al efectuar un lanzamiento, si acontece el evento A no puede suceder el B, y viceversa: la ocurrencia de uno imposibilita la del otro.

d) ¿Cuánto suman las probabilidades de los eventos B y B'? ______

e) ¿Los eventos B y B' son mutuamente excluyentes? ______

Explica. ______

Compartan con otros los resultados. Comenten qué relación tiene la probabilidad de un evento con la probabilidad de que ese mismo evento no ocurra.

¡Ya lo aprendimos!

En el caso del experimento de hacer girar la ruleta en una oportunidad, el evento B': no obtener 20 puntos, es complemento del B: obtener 20 puntos, pues todos los resultados favorables del evento B son diferentes a los resultados favorables del evento B'.

Así, dos eventos son complementarios si cumplen lo siguiente:

- **La unión de los resultados favorables de ambos es igual al espacio muestral del experimento.**
- **Todo evento tiene un evento complementario y la suma de sus probabilidades es igual a 1.**

Por ejemplo, en el experimento *lanzar una moneda*, el evento *cae águila* es complemento del evento *cae sol;* o bien, en *lanzar un dado*, el evento *cae número par* lo es de *cae número impar*.

1. Resuelve lo siguiente para el *experimento I*:

a) Calcula la probabilidad de cada evento:

- Probabilidad de que ocurra el evento A. P(A) =
- Probabilidad de que ocurra el evento D. P(D) =

b) Si se obtienen 10 puntos, ¿puede ocurrir que también caiga en color azul?

______

c) ¿Los eventos A y D son mutuamente excluyentes? ______. Explica por qué.

______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al obtener 10 puntos en la ruleta también caiga en color azul?

P(A y D) =

e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 10 puntos; o bien, de que la ruleta caiga en color azul?

P(A o D) =

f) Compara las probabilidades obtenidas en los incisos d) y e). ¿Son iguales los valores respectivos? ______. Explica por qué. ______

______

g) Comparte los resultados. Comenta cómo calculaste la probabilidad en los casos P(A y D) y P(A o D).

2. Para el *experimento I* resuelve lo siguiente:

a) Calcula las probabilidades respectivas de que ocurran los eventos C y E:

P(C) = P(E) =

b) Si se obtienen 30 puntos, ¿puede ocurrir que también caiga en color amarillo?

______

c) ¿Los eventos C y E son mutuamente excluyentes? ______. Explica por qué.

______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al obtener 30 puntos en la ruleta también caiga en color amarillo?

P(C y E) =

e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 30 puntos; o bien, de que la ruleta caiga en color amarillo?

P(C o E) =

f) Compara las probabilidades obtenidas en los incisos d) y e). ¿Son iguales los valores respectivos? ______. Explica por qué. ______

______

3. Considera los siguientes eventos para el *experimento II* y resuelve:

Evento G: Obtener 40 puntos.

Evento H: Obtener 50 puntos.

a) Calcula la probabilidad de cada evento:

P(G) = P(H) =

b) Si en la primera oportunidad se obtienen 20 puntos, ¿cuál es el puntaje total más probable de obtener (sumando los resultados de ambas)? ______

c) Al jugar la ruleta, ¿los resultados de la primera oportunidad son mutuamente excluyentes con los de la segunda? ______

Explica por qué. ______

______

Comenten con sus compañeros cómo se calcula la probabilidad de que ocurran eventos mutuamente excluyentes , y cómo se calcula la probabilidad de que ocurran eventos que no son mutuamente excluyentes. Escriban en su cuaderno las conclusiones a las que lleguen.

4. **Analiza y contesta en el cuaderno; da ejemplos para justificar tus respuestas:**

a) La probabilidad de obtener un puntaje determinado, ¿depende de la disposición de los colores en la ruleta? ____________

b) Supongamos que la ruleta no tiene colores sino sólo números. ¿Cuál es el puntaje con mayor probabilidad de obtenerse al efectuar un giro? ____________

c) Supongamos ahora que la ruleta no tiene números sino sólo colores. ¿Cuál es el color con mayor probabilidad de obtenerse al efectuar un giro? ____________

¡Ya lo aprendimos!

Cuando dos eventos se definen en un espacio muestral y son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro se obtiene con la suma de las probabilidades de cada evento. Esto se expresa así:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Cuando dos eventos no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro se obtiene con la suma de las probabilidades de cada evento, menos la probabilidad de que sucedan al mismo tiempo. Esto se expresa así:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Ésta recibe el nombre de regla de la suma o de la adición.

Individual

La tabla 13.1 muestra parte de los datos obtenidos de una encuesta donde se preguntó a un grupo de jóvenes qué nivel escolar cursaban y qué tipo de actividad extraescolar efectuaban.

1. **Completa la tabla con los totales faltantes:**

Jóvenes	Practica un deporte	Aprende un idioma	Total por nivel escolar
Secundaria	30	10	
Preparatoria	40	20	
Total por actividad extraescolar			

Tabla 13.1

2. **En relación con los datos de la tabla 13.1, considera los siguientes eventos:**

Evento A: Practica un deporte.

Evento B: Estudia preparatoria.

Evento C: Aprende un idioma y estudia secundaria.

a) Si se selecciona al azar a un joven que practica un deporte, ¿puede ocurrir que también sea estudiante de preparatoria?

____

¿Son mutuamente excluyentes los eventos A y B? ____________

¿Por qué? ____________

____

____

b) Si se selecciona al azar a un joven que practica un deporte, ¿puede ocurrir que también aprenda un idioma?

____

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un joven seleccionado al azar sea estudiante de preparatoria?

____

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un joven seleccionado al azar practique un deporte?

____

e) ¿Cuál es la probabilidad de que un joven seleccionado al azar aprenda un idioma y estudie secundaria?

____

f) ¿Cuál es la probabilidad de que el joven seleccionado practique un deporte o que aprenda un idioma y sea estudiante de secundaria?

____

Con otros compañeros comparen sus respuestas. Comenten cómo calcularon la probabilidad para cada caso.

Acuérdate de...

Dados dos eventos A y B, si ocurre uno (digamos A) y no puede suceder el otro (digamos B) ni tienen resultados favorables en común, decimos que los eventos son **mutuamente excluyentes**.

3. **Utilicen la tabla 13.1 para contestar lo siguiente:**

a) ¿Cuántos jóvenes practican un deporte? ____________

b) ¿Cuántos aprenden un idioma? ____________

c) ¿Cuántos estudian secundaria? ____________

d) ¿Cuántos aprenden un idioma y estudian secundaria? ____________

e) Según los datos de la tabla, ¿qué representa el número 20? ____________

f) En total, ¿cuántos jóvenes participaron en la encuesta? ____________

g) Identifiquen los eventos mutuamente excluyentes y anoten una ✔.

- Al seleccionar al azar a un participante en la encuesta: "el joven seleccionado practica un deporte" o "el joven seleccionado estudia secundaria". ☐
- Al seleccionar al azar a un participante en la encuesta: "el joven seleccionado practica un deporte" o "el joven seleccionado aprende un idioma y estudia secundaria". ☐
- Al seleccionar al azar a un participante en la encuesta: "el joven seleccionado estudia preparatoria" o "el joven seleccionado aprende un idioma y estudia secundaria". ☐

Comparen las respuestas con las de los compañeros y comenten cómo determinaron cuáles eventos son mutuamente excluyentes. Planteen sus procedimientos y resultados al profesor, quien puede ayudarlos a resolver dudas.

4. Completen la tabla 13.2 con el valor de la probabilidad correspondiente a cada evento:

Jóvenes	Practica un deporte	Aprende un idioma	Total por nivel escolar
Secundaria			
Preparatoria		$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$	
Total por actividad extraescolar			$\frac{100}{100} = 1$

Tabla 13.2

a) Calculen la probabilidad de que al seleccionar al azar a un joven practique un deporte.

P(practica un deporte) = P(A) =

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento C?

P(aprende un idioma y estudia la secundaria) = P(C) =

c) Si se selecciona al azar a un joven, ¿cuál es la probabilidad de que practique un deporte y aprenda un idioma y estudie secundaria; es decir, ocurrencia del evento (A y C)?

P(A y C) =

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el joven seleccionado al azar practique un deporte o aprenda un idioma y estudie secundaria (A o C)? (Sugerencia: no consideres el número de quienes cumplen ambas condiciones a la vez.)

P(A o C) =

e) Comparen el valor de la probabilidad obtenida en el inciso d) con la suma de las correspondientes a los incisos a) y b), ¿son iguales o distintas? ______

Si son diferentes, ¿cuál es la diferencia? ______

______

5. Analiza y responde:

a) ¿Cuántos jóvenes practican un deporte y estudian preparatoria a la vez?

______

b) Calcula la probabilidad de que el joven seleccionado al azar practique un deporte y estudie preparatoria (A y B).

P (A y B) =

c) ¿Cuántos jóvenes practican un deporte o estudian preparatoria? (Sugerencia: no consideres el número de quien cumplen ambas condiciones a la vez.)

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el joven seleccionado al azar practique un deporte o estudie preparatoria (A o B)?

P(A o B) =

e) Compara el valor de la probabilidad obtenida en el inciso d) con la suma de la probabilidad del evento "practica un deporte" y la de "estudia la preparatoria". ¿Son iguales o diferentes? ______

______

Si son distintas, ¿cuál es la diferencia? ______

______

f) Comparen esa diferencia con la probabilidad del evento (A y B) obtenida en el inciso b). ¿Son iguales o distintas? ______ ¿Por qué consideran que se presenta esa diferencia? ______

______

¡Hazlo tú mismo!

1. Considera el experimento de lanzar un dado (no cargado). Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

Evento A: Se obtienen 3 puntos o menos.

Evento B: Se obtienen 5 puntos o más.

a) ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes? ______

Justifica tu respuesta. ______

b) Calcula la probabilidad de obtener A o B.

c) Calcula la probabilidad de A' (complemento de A).

2. Se tiene una urna con 50 papeles de colores: 15 rojos, 5 morados, 9 verdes, 11 naranjas y 10 azules.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer un papel de la urna, sea azul o uno rojo?

______

Evaluación por competencias

Lee cada situación y elige la respuesta correcta:

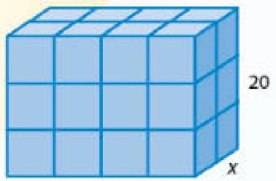


Figura 2.1

Situación 1. Un apilamiento de cajas cuadradas como el de la figura 2.1 tiene 20 unidades de altura y se sabe que el largo excede en 3 de éstas el ancho. Si hay 2 160 cajas en el apilamiento, ¿cuáles son el largo y ancho de éste?

1. **¿Cuál ecuación cuadrática debe resolverse?**

   a. $2x^2 + 6x - 2160 = 0$ *c.* $x^2 - 3x + 108 = 0$
   b. $x^2 + 3x - 108 = 0$ *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **¿Cuál es la factorización de la ecuación por resolver?**

   a. $(x - 12)(x + 9) = 0$ *c.* $(x + 12)(x + 9) = 0$
   b. $(x + 12)(x - 9) = 0$ *d.* Otra. Escríbela. ________

3. **¿Cuál es la solución del problema planteado?**

   a. $x = 9, y = 12$ *b.* $x = 12, y = 9$ *c.* $x = 8, y = 11$ *d.* Otra. Escríbela. ________

Situación 2. Observa las figuras 2.2 a 2.4:

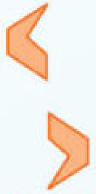


Figura 2.2

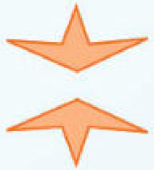


Figura 2.3

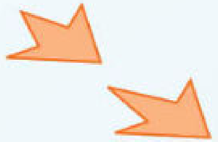


Figura 2.4

1. **¿Cuál de las figuras anteriores corresponde a una rotación?**

   a. 2.2 *b.* 2.3 *c.* 2.4 *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **¿Cuál a una traslación?**

   a. 2.2 *b.* 2.3 *c.* 2.4 *d.* Otra. Escríbela. ________

3. **¿Cuál a una reflexión?**

   a. 2.2 *b.* 2.3 *c.* 2.4 *d.* Otra. Escríbela. ________

4. **Escribe F si la proposición es falsa o V si resulta verdadera:**

   a. En las figuras anteriores se conserva la medida de los ángulos. ________
   b. En las figuras anteriores se conserva la distancia entre los puntos. ________
   c. En las figuras anteriores no se conserva el tamaño. ________
   d. Las figuras anteriores no son colineales. ________

Evaluación por competencias

Situación 3. Subraya las medidas de los lados correspondientes a triángulos rectángulos:

a. 20, 21, 28 *b.* 6, 8, 10 *c.* 4, 5, 5 *d.* Otra. Escríbela. ________

Situación 4. Una escalera se encuentra apoyada en la pared; si se sabe que la primera mide 10 m y se encuentra a una distancia de 4 m de la segunda, ¿cuál es la altura de ésta?

a. 8 m *b.* 6 m *c.* 4 m *d.* Otra. Escríbela. ________

Situación 5. Luis quiere construir un corral cuadrado para pollos y guajolotes, para lo cual cerca un terreno cuadrado de 5 m por lado; a última hora decide separar con una malla en diagonal los primeros de los segundos con. ¿Cuántos metros debe medir la red?

a. $\sqrt{55}$ *b.* $\sqrt{50}$ *c.* $\sqrt{25}$ *d.* Otra. Escríbela. ________

Situación 6. Considera el experimento de lanzar dos dados y sumar los puntos que aparezcan en la cara superior.

1. **¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 o 10 puntos cuando se lanzan los dados?**

   a. $\frac{1}{6}$ *b.* $\frac{1}{12}$ *c.* $\frac{1}{4}$ *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 o 12 puntos cuando se lanzan los dados?**

   a. $\frac{1}{9}$ *b.* $\frac{1}{12}$ *c.* $\frac{1}{36}$ *d.* Otra. Escríbela. ________

3. **¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 o más puntos al lanzar los dados?**

   a. $\frac{5}{6}$ *b.* $\frac{1}{3}$ *c.* $\frac{5}{36}$ *d.* Otra. Escríbela. ________

Situación 7. En una agencia automotriz se calculó que la probabilidad de que un comprador escogiera un vehículo de color rojo, azul, gris o verde es 0.24, 0.27, 0.16 y 0.08, respectivamente.

1. **¿Cuál es la probabilidad de que seleccione uno rojo o uno azul?**

   a. 0.24 *b.* 0.51 *c.* 0.051 *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **¿Cuál es la probabilidad de que seleccione uno gris o uno verde?**

   a. 0.24 *b.* 0.024 *c.* 0.16 *d.* Otra. Escríbela. ________

3. **¿Cuál es la probabilidad de que no compre uno rojo?**

   a. 0.76 *b.* 0.27 *c.* 0.2 *d.* Otra. Escríbela. ________

4. **¿Cuál es la probabilidad de que no compre uno verde?**

   a. 0.92 *b.* 0.16 *c.* 0.66 *d.* Otra. Escríbela. ________

Bloque 3

Aprendizajes esperados

Al terminar el estudio del presente bloque serás capaz de:

- Resolver problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

En la historia de la humanidad, varias civilizaciones se ocuparon del estudio de las matemáticas en sus diferentes áreas. Por ejemplo, los babilonios, en Mesopotamia, desarrollaron hace 4000 años lo que hoy conocemos como álgebra, con mayor nivel que otras culturas de la época, incluida la egipcia: sabían resolver tanto ecuaciones lineales como cuadráticas y ciertas cúbicas.

En la actualidad, el conocimiento de las ecuaciones posee gran relevancia para analizar y modelar procesos y fenómenos asociados con áreas como las ciencias naturales, la economía o la informática. El conocimiento matemático y la vida cotidiana están más estrechamente interrelacionados de lo que imaginas. En el bloque exploraremos parte de ello.

Lección 14

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema: Patrones y ecuaciones.
Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

¿Una fórmula general?

La resolución de la ecuación de segundo grado se remonta a los comienzos de la matemática. Los antiguos egipcios y los babilonios conocían métodos para resolver ecuaciones de segundo grado; y hace varios siglos los estudiosos dedujeron una fórmula para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Como ves, desde la Antigüedad el hombre ha encontrado la manera de simplificar sus problemas. Hay una fórmula muy útil para resolver las ecuaciones cuadráticas donde resulta difícil utilizar la factorización o las operaciones inversas.

En esta lección resolverás problemas que impliquen ecuaciones cuadráticas mediante fórmula general.

Punto de partida

Desde la parte alta de un edificio de 15 m de altura (h) se deja caer libremente una piedra. ¿Cuánto tiempo tardará para chocar con el piso?

Investiga en el libro de Ciencias II de segundo año las fórmulas generales de caída libre y responde en el cuaderno las siguientes preguntas.

a) ¿Debe considerarse la gravedad en problemas de este tipo? ______

b) ¿Por qué? ______

Acuérdate de...

Cuando un objeto se deja caer, la velocidad inicial será siempre igual a cero ($v_0 = 0$).

En cambio, cuando un objeto se lanza la velocidad inicial será siempre diferente de cero ($v_0 \neq 0$).

Figura 14. 1 Un cuerpo presenta caída libre si cae bajo la influencia de la fuerza de gravedad, sin considerar la resistencia del aire.

c) ¿Cuál es el valor aproximado de la gravedad? (redondea a centésimos) ______

d) Escribe los datos del problema:

h = ______

g = ______

V_0 = ______

t = ______

e) ¿Qué fórmula utilizarías para resolver el problema? ______

Comprueba las respuestas sustituyendo tu resultado en la ecuación obtenida.

Con la guía del profesor comenten con el resto del grupo el resultado al que llegaron.

Acuérdate de...

La forma general de las ecuaciones de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$

Aprendemos

En equipo

La expresión obtenida del problema anterior es una ecuación cuadrática incompleta pura; como advertiste, puedes resolverla despejando la incógnita, pero en ciertos casos no es tan sencillo. Para ellos hay una fórmula que permite resolver cualquier ecuación de segundo grado con una incógnita:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. Encuentren dos números que cumplan la condición $x^2 + 2x = 1$

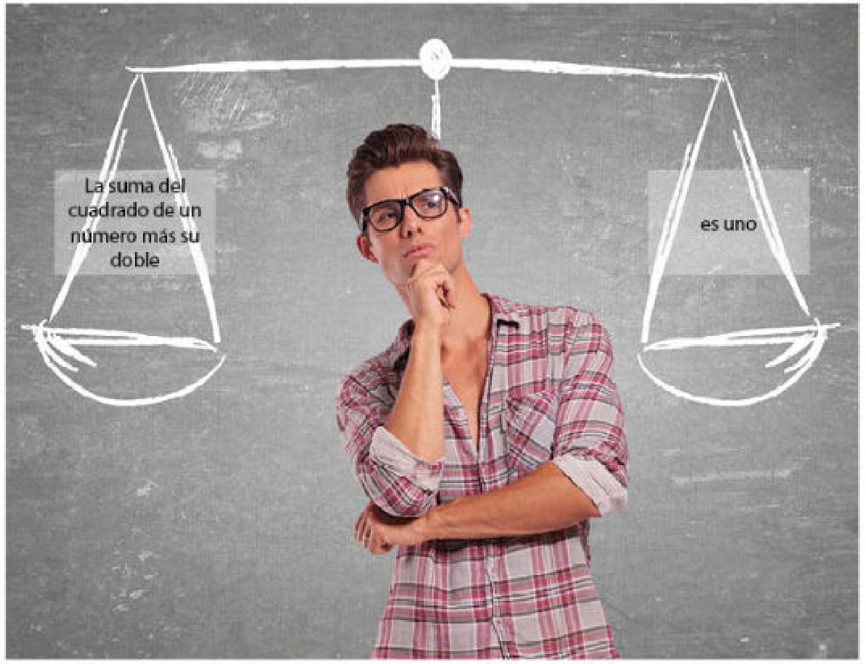


Figura 14. 2

a) Iguala la ecuación a cero para resolverla. ______

b) ¿Puede resolverse la ecuación por el método de factorización? ______

Justifica la respuesta. ______

c) Identifica los coeficientes para resolver el problema por fórmula general:

a = ______ b = ______ c = ______

d) Sustituye los coeficientes en la fórmula y después realiza los cálculos indicados.

e) Escribe las soluciones de la ecuación.

x_1 = ______ x_2 = ______

Acuérdate de...

La expresión general de una ecuación de segundo grado en su forma general es $ax^2 + bx + c = 0$. Tiene dos soluciones; si utilizas la fórmula general, éstas son:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Glosario

ecuaciones cuadráticas incompletas pura: cuando falta el término bx; por tanto $b = 0$ y tendrá la forma: $ax^2 + c = 0$

mixta: Si falta el término independiente c, y tendrá la forma: $ax^2 + bx = 0$

Caja de herramientas

Los números buscados son **irracionales**; utiliza calculadora para resolver el problema.

Glosario

número irracional: el que no puede representarse como cociente de un entero y un natural; por ejemplo: $\sqrt{2}$, la constante π, o el número de Euler.

Individual

1. **De manera individual encuentra las soluciones de los siguientes problemas:**

Un balón es lanzado hacia arriba; la altura alcanzada viene dada por la expresión $-5x^2 + 10x$, donde "x" representa los segundos transcurridos (figura 14.3):

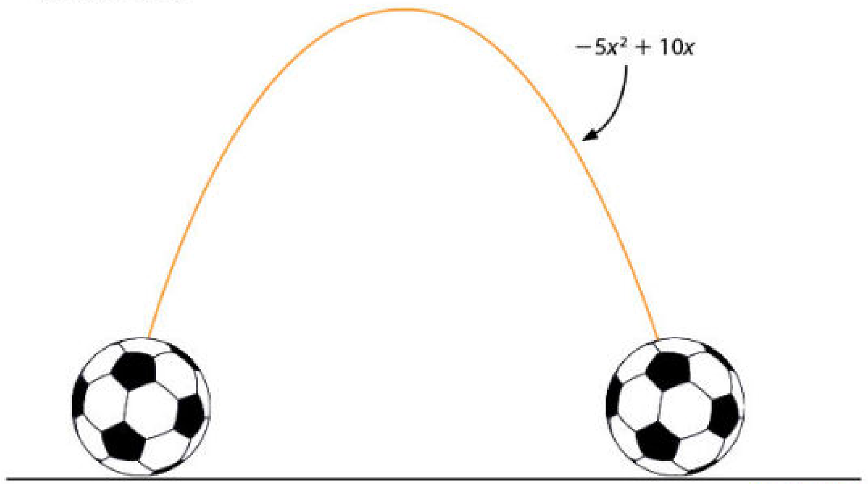


Figura 14. 3

a) ¿En cuántos segundos toca el suelo? ____________

b) Si toca el suelo, ¿qué altura tiene? ____________

c) ¿Cuántas soluciones encontraste? ____________

d) Según el contexto del problema, ¿qué indican las soluciones? ____________

2. **Ana propone a Pedro encontrar las raíces de dos ecuaciones cuadráticas con el método de fórmula general.**

a) Escribe las soluciones en los renglones:

$$9x^2 - 30x + 25 = 0$$

$x_1 =$ ____________ $x_2 =$ ____________

$$x^2 + x + 3 = 0$$

$x_1 =$ ____________ $x_2 =$ ____________

b) ¿Cuántas soluciones encontraste en la primera ecuación? ____________

c) ¿Por qué sucede esto? ____________

d) ¿La segunda ecuación tiene soluciones? ____________

¿Por qué? ____________

Acuérdate de...

La jerarquía de las operaciones

1. Efectúa las operaciones entre paréntesis, corchetes y llaves.
2. Calcula las potencias y las raíces.
3. Resuelve los productos y los cocientes.
4. Realiza las sumas y las restas.

En contexto

Algunos problemas del contexto deportivo se resuelven con ecuaciones de segundo grado, por ejemplo: una pelota de futbol al ser despejada por el portero.

La práctica del deporte además de los beneficios para la salud que ya son ampliamente conocidos, retarda, mejora o previene las enfermedades crónico-degenerativas. http://www.revista.unam.mx/vol.6/num6/art62/jun_art62.pdf (Consulta: 24 de enero de 2017)

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Ya lo aprendimos!

La expresión en el radical; es decir $b^2 - 4ac$, se llama ***discriminante***:

- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación de segundo grado no tiene solución; es decir, las raíces son imaginarias.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución (doble) $x = \frac{-b}{2a}$.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones.

¡Hazlo tú mismo!

1. **De manera individual utiliza la fórmula general y encuentra la solución de los siguientes problemas:**

¿Cuánto mide el área y el perímetro del triángulo rectángulo mostrado en la figura 14.4 si las dimensiones están en metros? (Apóyate en el teorema de Pitágoras.)

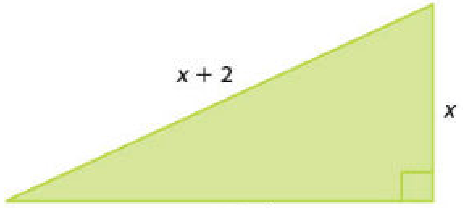


Figura 14. 4

a) Si utilizas el teorema de Pitágoras, ¿qué ecuación plantearías? ____________

b) Las raíces de la ecuación son $x_1 =$ ____________ y $x_2 =$ ____________

c) De acuerdo con el problema, elige la solución válida y encuentra el área y el perímetro:

Área = ________ Perímetro = ________

2. **Si tenemos cierto triángulo con un área de 5 cm² y una altura 3 cm mayor que la base, ¿cuál sería la medida de ésta?** ____________

3. **Cierto proyectil es lanzado hacia arriba. La altura está dada por la expresión $-4.5x^2 + 14x$. Si x es el tiempo en segundos, ¿cuánto tiempo tarda el objeto en caer al suelo?** ____________

4. **Un terreno rectangular mide 4 m más de largo que de ancho y su área comprende 45 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?** ____________

Glosario

números imaginarios: son las raíces cuadradas de los números negativos.

$i = \{\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4}, \ldots \infty\}$

¡Qué curioso!

La manada de monos

Regocíjanse los monos divididos en dos bandos: su octava parte al cuadrado en el bosque se solaza.
Con alegres gritos, doce atronando el campo están. ¿Sabes cuántos monos hay en la manada, en total?

Disponible en: http://www.librosmaravillosos.com/algebrarecreativa/capitulo06.html

(Consulta: 13 de enero de 2017)

En infinidad de problemas matemáticos, la solución se obtiene de una ecuación de segundo grado; visita el enlace y encontrarás otros de ellos.

Lección 15

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Figuras y cuerpos.
Contenido: Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Aplicaciones de los criterios de congruencia y semejanza

En ciertos problemas prácticos deben determinarse distancias, alturas, profundidades o cantidades derivadas de ellas, como el perímetro, el área o el volumen, que pueden resolverse con la aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos. En una situación dada proceden construcciones geométricas donde aparecen triángulos semejantes o congruentes que relacionan los datos desconocidos con los conocidos, dando así una solución.

En contexto

El término congruencia proviene del latín congruentia que significa coherencia, relación lógica. Seguramente has escuchado decir que somos congruentes con lo que decimos y hacemos cuando se asume plenamente un compromiso con un comportamiento determinado; conocer nuestros valores nos ayuda a mantener la congruencia entre nuestro pensar, sentir y actuar.

Punto de partida

En parejas y con ayuda de regla, compás y transportador determinen y encierren en un círculo, cuáles de los siguientes triángulos son congruentes.

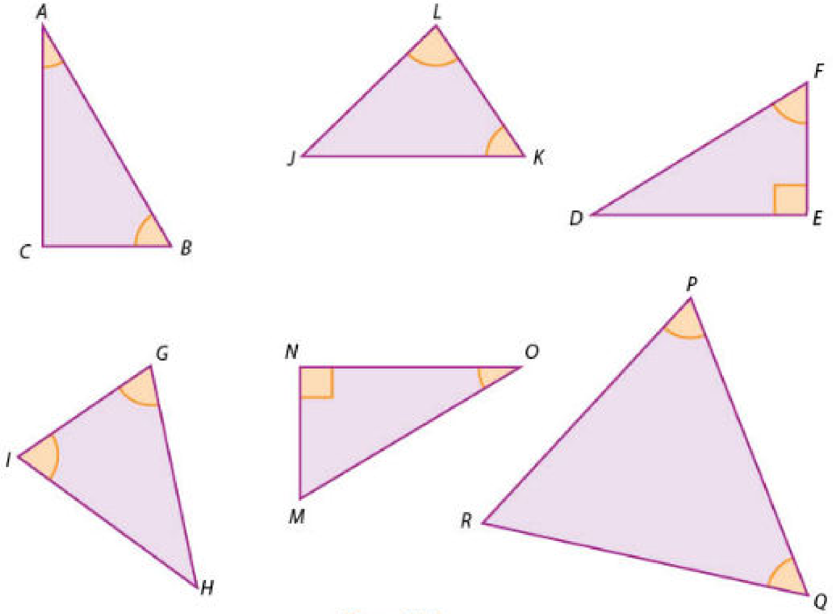


Figura 15.1

Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F); coloquen en la línea la letra respectiva:

a) "Si dos triángulos tienen un lado de igual medida, lo mismo que dos de los ángulos, entonces son congruentes." _____ Justifiquen su respuesta. ____________

b) "Dos triángulos congruentes también son semejantes." _____ Justifiquen su respuesta.

c) "Dos triángulos semejantes también son congruentes." _____ Justifiquen la respuesta.

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ un par de triángulos tales que si se toma cualquier pareja de lados de ΔABC, éstos guardan la misma proporción que los correspondientes en $\Delta A'B'C'$. ¿Qué se concluye de la situación precedente? ____________

En parejas encierren con un mismo color los triángulos semejantes en la figura 15.2:

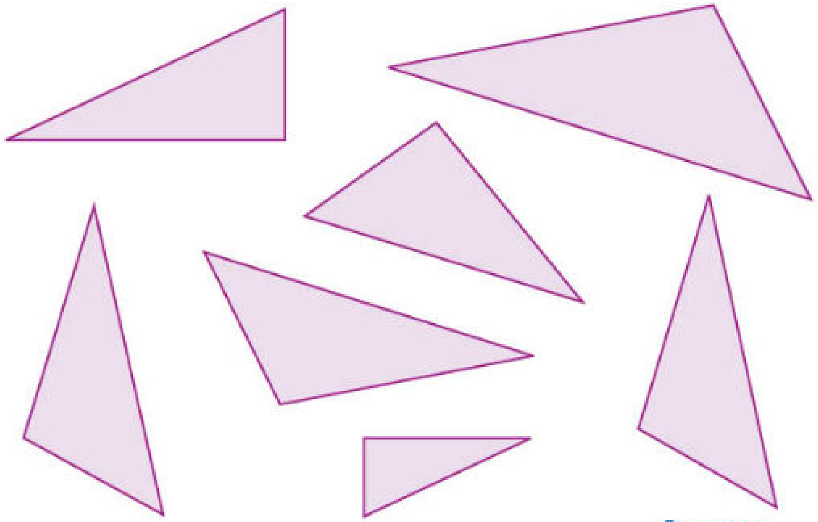


Figura 15.2

Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), pongan sobre la línea la letra respectiva:

a) Si las rectas *l* y *m* de la figura 15.3 son paralelas, ¿ΔABE y ΔCDE resultan semejantes? _______ Justifiquen la respuesta. ____________

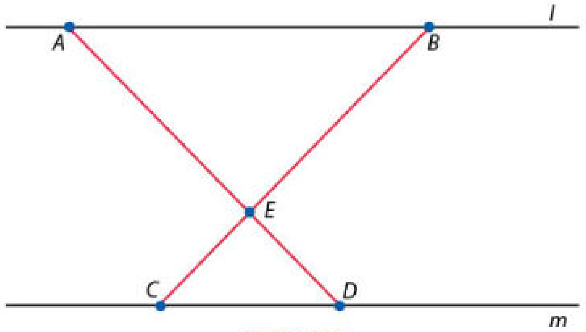


Figura 15.3

b) Cualesquiera dos triángulos equiláteros son semejantes. Justifiquen la respuesta.

c) Cualesquiera dos triángulos isósceles son semejantes. Justifiquen la respuesta.

Aprendemos

En pareja

1. **En parejas lean con cuidado la siguiente situación y respondan las preguntas:**

   Un topógrafo se encuentra en la posición *A* y su línea de visión es tal que pasa por el punto *B* de una vara de 1.5 m de altura y por el punto *B'* de un edificio de altura desconocida, como se muestra en la figura 15.4. El punto *A* está a 150 m de distancia de la base del inmueble; y el individuo, a 3 m de la base de la vara.

   a) Con una regla tracen el segmento *AB'*. ¿Qué relación hay entre el ΔABC con el $\Delta AB'C'$? Justifiquen la respuesta. ______

   b) Escriban la ecuación que relaciona la proporción del segmento *BC* respecto al *AC* con la proporción del *B'C'* respecto al *AC'*. ______

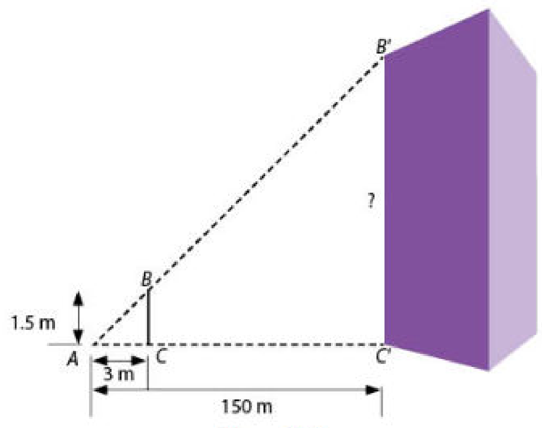


Figura 15.4

   c) ¿Qué criterio de semejanza es útil para solucionar el problema? Justifiquen la respuesta.

   ______

   d) ¿Cuál es la altura del edificio? ______

2. **Observen la figura 15.5 y respondan las preguntas:**

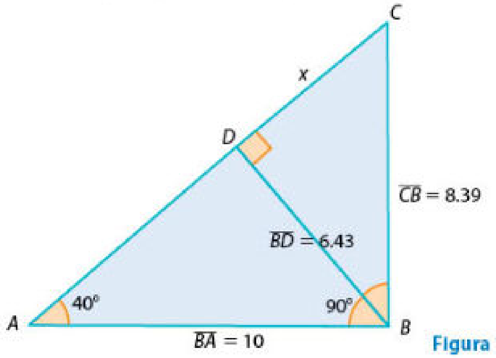


Figura 15.5

   a) ¿Cuáles triángulos mostrados en la figura 15.5 son semejantes? ¿Por qué?

   ______

   b) ¿Qué expresiones algebraicas relacionan los lados de los triángulos semejantes?

   ______

   c) ¿Qué expresión de las halladas en el inciso b) permite determinar el valor de *x*?

   ______

   d) ¿Cuál es el valor de *x*? ______

3. **Alguien está a 1.8 m del borde de una piscina vacía y observa una esquina del fondo; la línea de visión pasa por el borde de la alberca, como se muestra en la figura 15.6. La persona tiene una altura de 1.74 m y el ancho del depósito es de 4 m; se desconoce la profundidad de éste.**

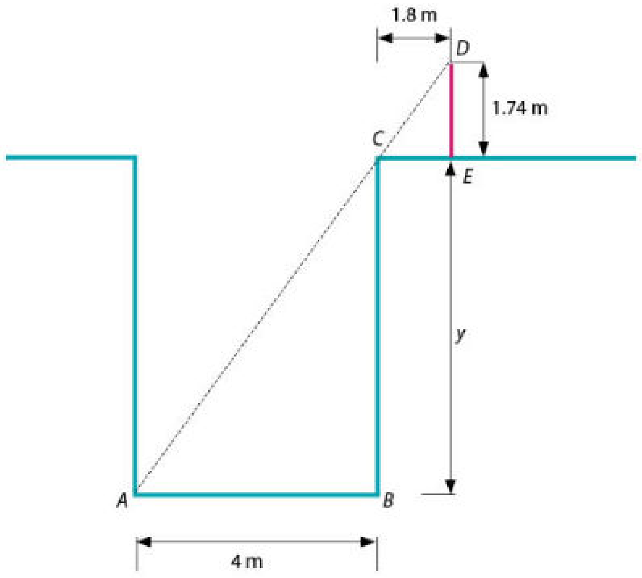


Figura 15.6

   a) ¿Qué relación guardan ΔABC y ΔCDE? Justifiquen la respuesta. ______

   ______

   b) Escriban las proporciones de cada par de lados en cada triángulo. De acuerdo con la respuesta del inciso a), ¿qué relación hay entre las proporciones del primer triángulo con las del segundo? ______

   c) Escriban la ecuación que relaciona el lado desconocido con los conocidos.

   ______

   d) ¿Cuál es la profundidad de la piscina? ______

4. **En grupo y con apoyo del profesor comuniquen y discutan las soluciones que cada pareja halló para resolver las situaciones anteriores.**

TIC y más

En las siguientes páginas encontrarás información útil sobre los criterios de semejanza y congruencia y cómo aplicarlos a la solución de problemas geométricos:
http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Semejanza_figuras_planas.html
(Consulta: 13 de enero de 2017)
http://www.vitutor.com/geo/eso/ss_2.html
(Consulta: 13 de enero de 2017)
http://www.eplc.umich.mx/salvadorgs/matematicas2/contenidos/triang_semejantes.html
(Consulta: 13 de enero de 2017)

¡Ya lo aprendimos!

1. En grupo discutan si hay un método general para resolver problemas geométricos donde se requieran los criterios de congruencia y semejanza.
2. Las siguientes sugerencias revisten utilidad en la mayoría de los problemas donde se aplican los criterios de congruencia o semejanza:
   a) Dibuja de manera precisa la situación.
   b) Identifica y resalta los triángulos que aparecen en el dibujo de la situación.
   c) Determina con el uso de los criterios de semejanza y congruencia cuáles triángulos son congruentes o semejantes.
   d) Determina qué lados y ángulos son iguales si se tiene congruencia de triángulos y qué ángulos y proporciones resultan iguales en el caso de semejanza de triángulos.
   e) Escribe ecuaciones que relacionen los datos desconocidos en términos de los conocidos.
   f) Resuelve las ecuaciones.
   g) Comprueba que las soluciones resuelvan efectivamente el problema.

¡Hazlo tú mismo!

Resuelve los siguientes problemas:

1. **Se levanta un cable a través de un poste, como se muestra en la figura 15.7. ¿Cuál es la longitud de aquél y cuál la distancia entre sus extremos?**

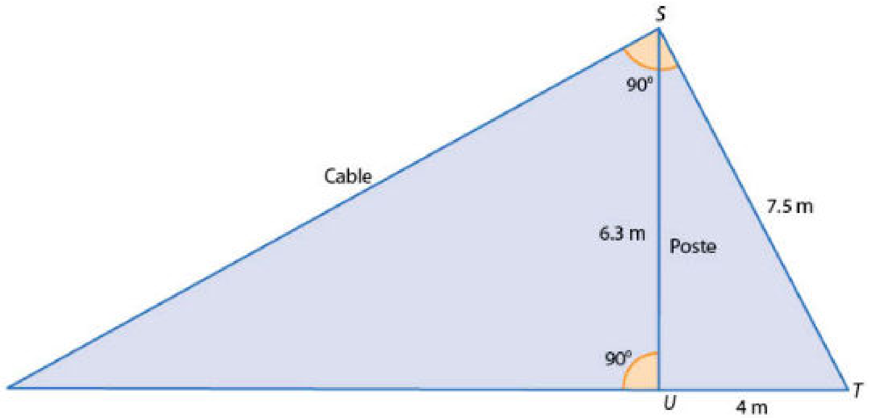


Figura 15.7

2. **Felipe hace para la clase de Historia una maqueta de la Gran Pirámide de Guiza, lo más parecida a la original. La base y la altura del monumento son de aproximadamente 230 m y 136.8 m, en ese orden. Si quiere que el modelo tenga una base cuadrada de 15 cm por lado, ¿cuál será la altura?**

3. **La vista de pájaro de un edificio indica que éste tiene por base un cuadrado y se encuentra rodeado de jardines, como se muestra en la figura 15.8. Si presenta las dimensiones indicadas ahí, ¿cuáles son las dimensiones de su base?**

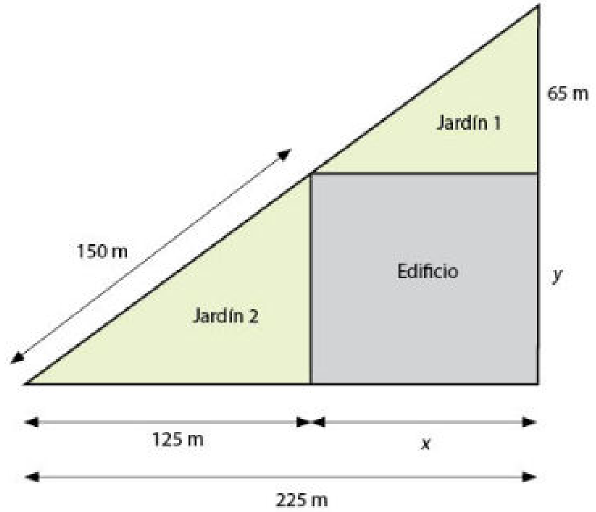


Figura 15.8

4. **En grupo y con apoyo del profesor comuniquen y discutan las soluciones que cada equipo obtuvo.**

¡Qué curioso!

Los expertos coinciden en que la altura original de la Gran Pirámide de Guiza (en Egipto) era de 146.61 m, pero debido a la erosión, producida principalmente por el viento, a lo largo de los años se ha perdido hasta quedar en 136.86 m.

Figura 15.9

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Lección 16

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Figuras y cuerpos.
Contenido: Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

¡Con razón!

¿Has pensado cómo medir alturas que no pueden determinarse con algún instrumento?

En la vida cotidiana se presentan situaciones en las cuales resulta necesario calcular alguna distancia sin medir directamente: es posible determinarla con la aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Tales.

En esta lección resolverás problemas que suponen la aplicación del teorema de Tales.

Punto de partida

Tales de Mileto (624-546 antes de nuestra era) fue uno de los siete sabios de la Antigüedad, gran filósofo y matemático griego. Se cuentan muchas anécdotas acerca de él. En su recorrido por el Mediterráneo se encontró con un faraón de Egipto. Cierta mañana, cuando recorrían el lugar, pasaron por la gran pirámide del rey Khufu (la de Keops) y aquél le propuso calcular la altura del monumento sin medir directamente. ¿Cómo lo habrá logrado?

Tales se acostó sobre la arena y determinó la longitud de su cuerpo; luego de pensar respondió:

–Me colocaré en un extremo de esta línea, que es igual a la longitud de mi cuerpo, y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide será igual a su altura.

Inconforme con la facilidad mostrada para resolver el problema, el faraón le preguntó si había algún error, una falacia. Tales agregó:

–Pero si queréis que os mida esa altura, a cualquier hora, clavaré en la arena mi bastón.

En contexto

En la venta de algún departamento o casa nueva casi siempre se muestra una maqueta que indica la distribución de las habitaciones, la semejanza es una de las aplicaciones para ver esta similitud con el original, ¿cómo puedes calcular el área de la maqueta con la original?

Resuelve las siguientes actividades de manera individual

Observa en la figura 16.1 la técnica que Tales utilizó para medir la altura de la pirámide.

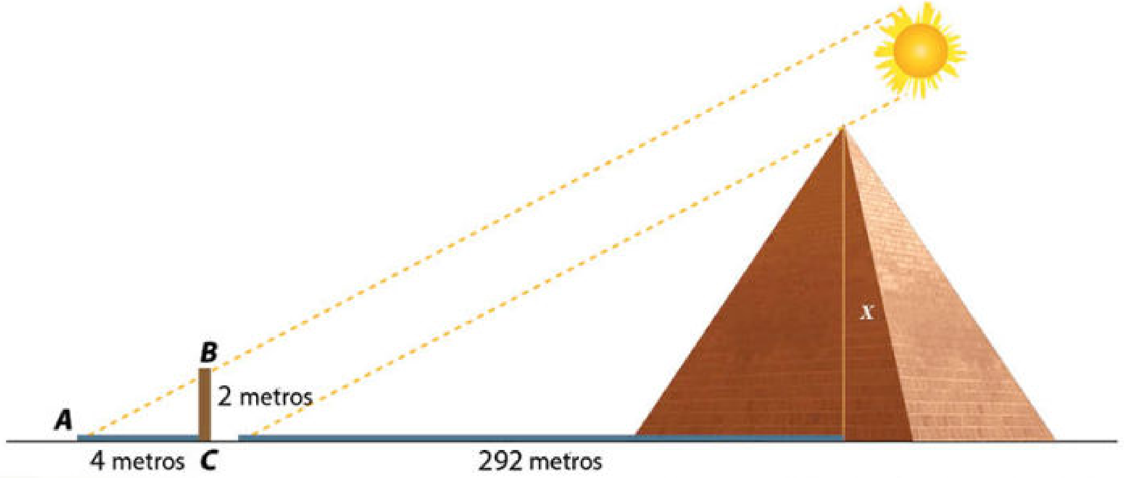


Figura 16.1 Los rayos del Sol inciden paralelamente sobre la Tierra.

En la figura 16.1, el segmento *BC* representa un bastón vertical, la recta *AB* señala la dirección de los rayos solares y el segmento *AC* es la sombra del báculo sobre el suelo horizontal.

a) Describe si puedes utilizar el teorema de Pitágoras para resolver el problema.

____

b) ¿Por qué Tales llegó a la conclusión de que en algún momento determinado la sombra de la pirámide sería igual a su altura? ____________________

c) ¿Qué propiedad matemática utilizó? ____________________

d) Observa el triángulo *ABC* y el formado por la altura y la sombra de la pirámide. ¿Cómo son entre sí ambos? ____________________

Observa de nuevo la figura 16.1. Supongamos que en determinada hora del día la sombra de la pirámide mide 292 m, el bastón 2 m y la sombra de éste 4 m. ¿Cuál es la altura del monumento? ________ **¿Por qué?** ________

____

a) ¿Cuál es la razón entre la altura del bastón y la longitud de su sombra? $\frac{\square}{\square}$

b) ¿Y la que hay entre la altura de la pirámide y la longitud de su sombra? $\frac{\square}{\square}$

Con la guía del profesor y los compañeros reflexionen respecto al método de solución del problema.

Aprendemos

Individual

Martha dejó caer una aguja sobre una hoja de papel rayada; observó cierta relación entre los segmentos formados y nombró algunos puntos como se muestra en la figura 16.2.

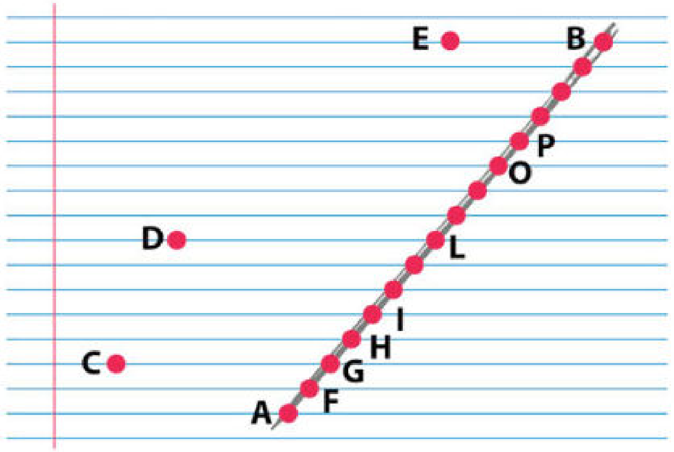


Figura 16. 2

Acuérdate de...

Una **razón** es la relación entre dos números, definida como el cociente de un número por el otro. Así, la razón de 5 es a 4 se expresa como $\frac{5}{4}$.
Proporción es una igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a,d → Extremos

b,c → Medios

En una **proporción** el producto de los medios es igual al de los extremos.
Criterios de semejanza. Fijan las condiciones mínimas para establecer que dos triángulos son semejantes.
Dos triángulos son semejantes cuando tienen:

- Dos ángulos iguales.
- Los lados proporcionales.
- Dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

1. **Analiza la figura 16.2 y responde las preguntas siguientes:**

   a) ¿Cuántos puntos están sobre la aguja? ____________

   b) Si tomas como punto inicial *A* y como final *B*, ¿en cuántas partes quedó dividido el segmento $\overline{AB}$? ____________

   c) ¿Cómo son entre sí esas partes? ____________

2. **Mide cada una de las partes para comprobarlo.**

3. **Traza los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$.**

   a) ¿En cuántas partes quedó dividido cada segmento? ____________

   b) ¿Cómo son los segmentos entre las líneas paralelas de la hoja de cuaderno? ____________

4. **Nombra los puntos faltantes con las letras consecutivas del abecedario y resuelve lo siguiente:**

   a) ¿Cómo son las medidas de los segmentos $\overline{AF}$, $\overline{FG}$ y $\overline{OP}$ entre sí? ____________

   b) ¿Por qué los segmentos $\overline{AH}$ y $\overline{LO}$ son iguales? ____________

   c) Escribe cinco segmentos de longitud diferente de los anteriores y que también sean iguales. ____________

5. **Une el segmento $\overline{EB}$ y observa los triángulos formados en las intersecciones de las líneas paralelas y el segmento $\overline{AE}$, ¿Cómo son entre sí estos triángulos y el *ABE*?** ____________

6. **Con la guía del profesor encuentren segmentos proporcionales.**

Glosario

secante: línea que interseca dos o más puntos. La voz proviene del latín *secare*, "cortar".

¡Ya lo aprendimos!

Teorema de Tales

La semejanza de triángulos está basada en tal teorema, enunciado así: "Si varias paralelas son cortadas por dos rectas **secantes**, los segmentos determinados en una secante son proporcionales a los determinados en la otra".

Tomado de http://arquimedes.matem.unam.mx/descartes.org.mx/descartes/web/materiales_didacticos/Proporcionalidad_geometrica_amh/Teorema_%20de_Thales.htm
(Consulta: 24 de enero de 2017)

Considera la figura16.3, donde:

Las rectas *m* y *m'* son secantes en *P*.

A, A', B, B', C y *C'* son puntos de rectas paralelas.

Los segmentos sobre las rectas secantes son $\overline{PA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{PA'}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$

Estos seis segmentos son proporcionales:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C}$$

También las siguientes proporciones son verdaderas:

$$\frac{AA'}{PA'} = \frac{BB'}{PB'} = \frac{CC'}{PC'} \text{ y } \frac{AA'}{PA} = \frac{BB'}{PB} = \frac{CC'}{PC}$$

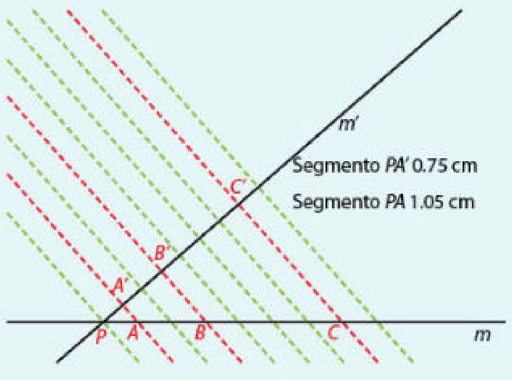


Figura 16.3

¡Qué curioso!

Hay una divertida canción sobre el teorema de Tales; la interpreta el grupo Les Luthiers y nació como un mero experimento: "Carlos Núñez Cortés tenía 19 años y cursaba segundo año de química, no conseguía meterse en la cabeza un enunciado de análisis matemático; finalmente se le ocurrió acoplarle una melodía cantable." [Tomado de http://www.lesluthiers.org/verobra.php?ID=4] Entra en http://descubriendolostesoros.blogspot.mx/2010/01/el-teorema-de-thales-les-luthiers.html y verás un video basado en la ella.

(Consulta: 24 de enero de 2017)

En equipo

1. **Reúnete en equipo y observen la figura 16.4. Tomen como referencia las rectas y las medidas para responder las preguntas siguientes:**

   a) ¿Cuál es la razón de $\overline{WX}$ con relación a $\overline{XY}$? ____________

   b) ¿Cuál es la razón de $\overline{ST}$ con relación a $\overline{TU}$? ____________

   c) ¿Cuál es la razón de $\overline{ST}$ con relación a $\overline{UV}$? ____________

   d) ¿Cuál es la razón de $\overline{WX}$ con relación a $\overline{YZ}$? ____________

   e) Expliquen si hay proporción en los segmentos. ____________

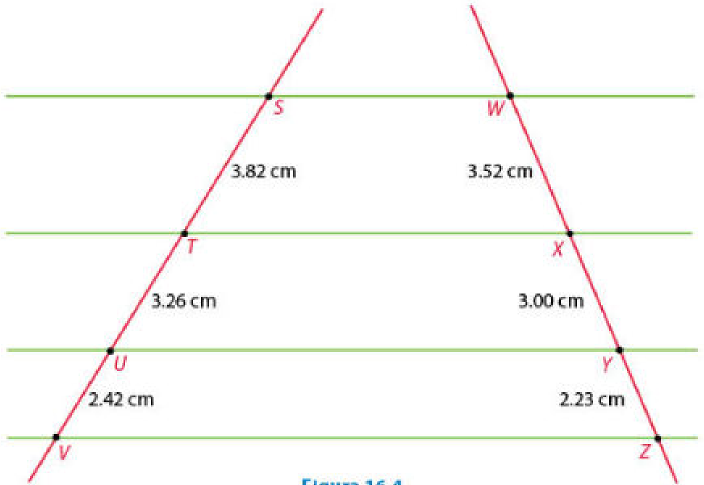


Figura 16.4

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

2. Si se prolongan hacia arriba las secantes, se cortarán en algún punto y se formará una serie de triángulos.

a) ¿Son iguales esos triángulos? __________ ¿Por qué? ____________________

____

b) ¿Qué elementos comunes tienen los triángulos? ____________________

c) ¿Cómo son sus lados entre sí? ____________________

d) ¿Cómo son los ángulos entre sí? ____________________

e) ¿Cómo son los triángulos entre sí? ____________________

¡Ya lo aprendimos!

Triángulos en posición de Tales

Dos o más triángulos en posición de Tales son semejantes sí.

- Tienen un ángulo en común.
- Los lados opuestos al ángulo en común son paralelos.

Si m//n//o entonces $\Delta ADG \sim \Delta BDF \sim \Delta CDE$.

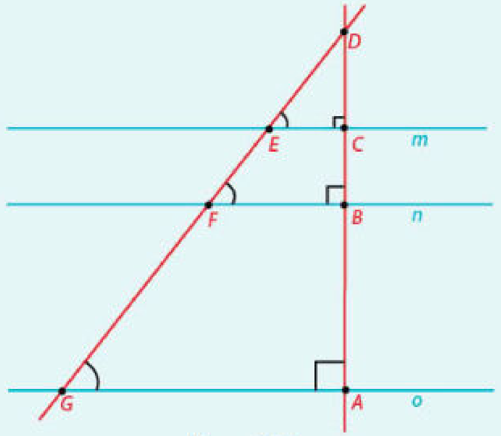


Figura 16.5

¡Hazlo tú mismo!

De manera individual resuelve los siguientes problemas:

1. **En determinado momento del día, la sombra de una persona que mide 1.8 m es de 2.7 m; al mismo tiempo, cierto árbol proyecta una sombra de 15 m. ¿Cuál es la altura del segundo (figura 16.6)?** ____________________

Figura 16.6

2. **Analiza la figura 16.7, observa los datos e indica cuánto medirá la sombra del edificio cuando la sombra del poste sea de 5 m.** ____________________

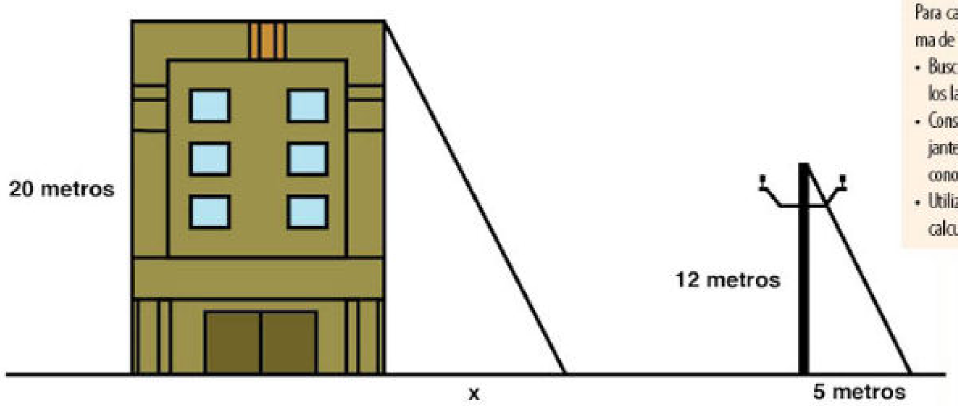


Figura 16.7

Caja de herramientas

Para calcular distancias por el teorema de Tales:

- Busca un triángulo donde uno de los lados sea el dato por calcular.
- Construye otro triángulo semejante a él cuyas dimensiones sean conocidas.
- Utiliza la proporción de lados para calcular la distancia desconocida.

3. **En las figuras 16.8 a 16.10 halla en cada caso el valor de *x*:**

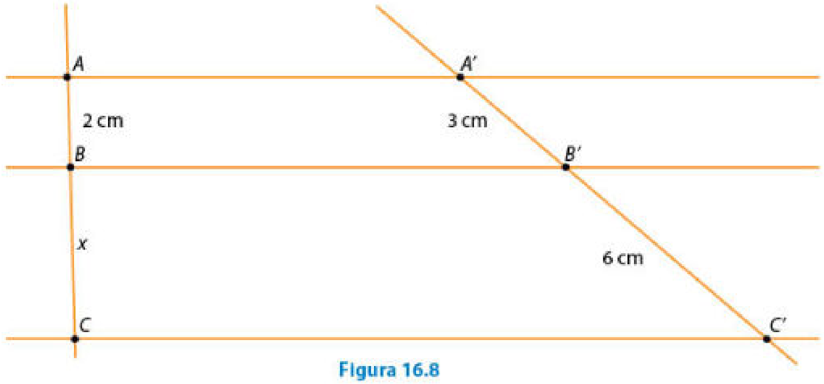


Figura 16.8

$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

$x =$ __________

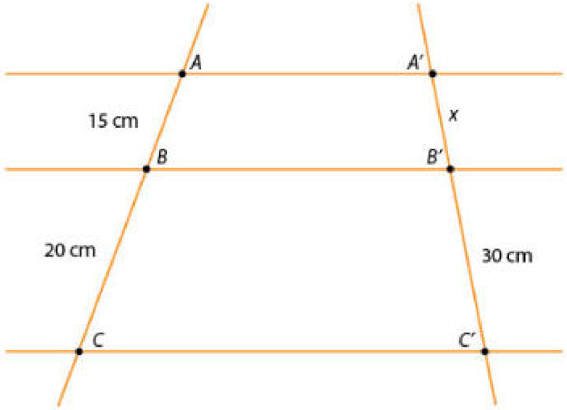


Figura 16.9

$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $x =$ __________

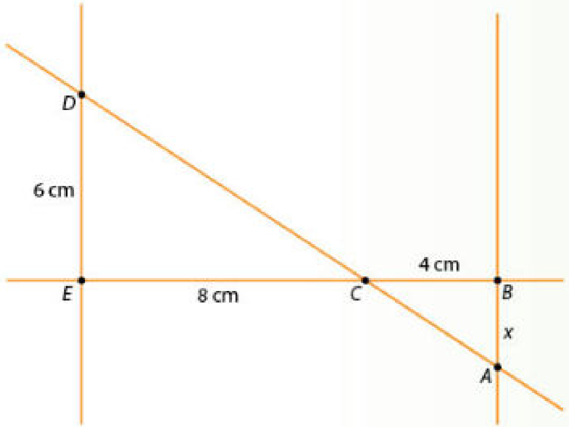


Figura 16.10

$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $x =$ __________

Lección 17

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Figuras y cuerpos.
Contenido: Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Proyección matemática

La óptica es la rama de la física que estudia la luz y los fenómenos por ella producidos; al analizar las imágenes formadas en las lentes convergentes (concentran en un punto los rayos de luz) y las divergentes (separan los rayos de luz que pasan por ellas) se aplica el concepto de **homotecia**.

Sin ella no tendríamos instrumentos tan útiles como la cámara fotográfica, el proyector, el microscopio o el telescopio.

En esta lección aplicarás la semejanza al estudio de la homotecia.

Glosario

homotecia: transformación geométrica lineal a partir de un punto fijo, llamado **centro de homotecia**, del cual se trazan segmentos de recta, y se multiplican las distancias por una constante.
centro de homotecia: punto de referencia que determina la constante k o razón de homotecia.
performance: representación escénica basada en la improvisación; intenta sorprender al público.

Punto de partida

Itzel y Ángeles tienen una actividad especial en la asignatura de Teatro: realizar un *performance* con sombras y proyecciones delante de un fondo iluminado. Para darse una idea utilizaron la pared como pantalla; paralelamente a ella colocaron un triángulo hecho con cartulina y a cierta distancia lo iluminaron en línea recta con una linterna (figura 17.1).

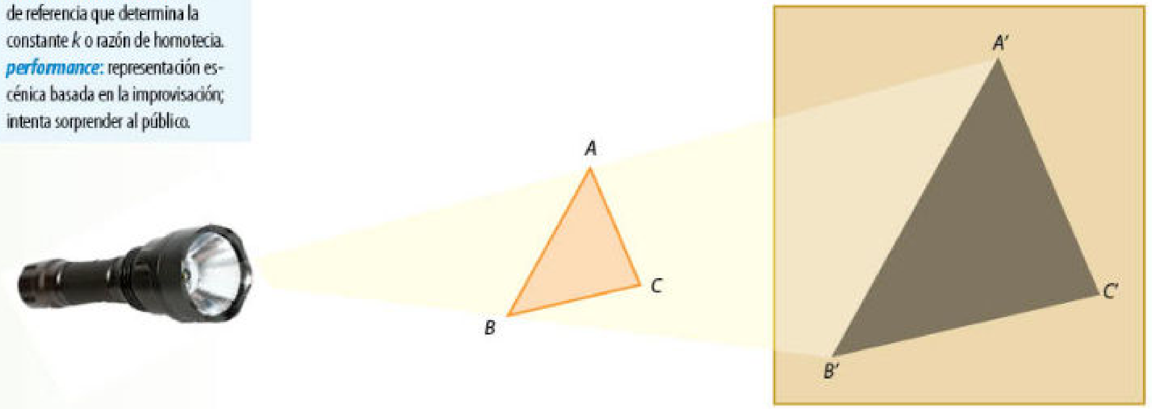


Figura 17.1

¡Qué curioso!

Los antecedentes del **teatro de sombras** datan de la prehistoria, cuando el hombre primitivo hacía sombras con el cuerpo y las manos frente a las fogatas.

Las sombras poseen connotaciones mágicas en casi todas las culturas. Estas formas inestables invitan a la imaginación y la creación, con lo cual estimulan la fantasía. Descubre acerca de su historia en http://www.asombras.com/0022-La_Sombra-35.html

(Consulta: 13 de enero de 2017)

Individual

a) Explica si hay alguna relación entre el triángulo (objeto) y la sombra formada en la pared. ______________________

b) ¿Qué sucede si la linterna se acerca o aleja del objeto? ______________________

c) Ahora, si permanece inmóvil la lámpara y se mueve el objeto, ¿qué sucede? ______________________

d) ¿Qué hacer para que el objeto y la sombra queden del mismo tamaño? ______________________

¡Qué curioso!

Pilobolus Dance Theatre es una compañía estadounidense dedicada a realizar *performance* con las sombras del cuerpo humano. Descubre cómo utilizar el cuerpo cual medio de expresión en http://www.pilobolus.org/

(Consulta: 24 de enero de 2017)

Utiliza transportador y regla para completar la tabla 17.1:

	Triángulo	Imagen del triángulo
Medida de los ángulos	$\angle ABC =$	$\angle A'B'C' =$
	$\angle BCA =$	$\angle B'C'A' =$
	$\angle CAB =$	$\angle C'A'B' =$
Longitud de los lados	$\overline{AB} =$	$\overline{A'B'} =$
	$\overline{BC} =$	$\overline{B'C'} =$
	$\overline{CA} =$	$\overline{C'A'} =$

Tabla 17.1

En la figura 17.1 une los puntos *A*, *B* y *C* con los correspondientes *A′*, *B′* y *C′*; prolonga las líneas hasta que se intersequen.

a) ¿Qué observas? ______________________
Nombra H al punto de intersección.

b) ¿Qué relación guardan los lados del triángulo con los de la imagen? ______________________

c) ¿Cómo son los ángulos del triángulo y su sombra? ______________________

Acuérdate de...

Razón. Cociente obtenido al comparar dos cantidades.
Teorema de Tales.
Semejanza y proporcionalidad.

Caja de herramientas

Entra en este link: http://www.geogebra.org/webstart/gebra.html (Consulta: 21 de junio de 2013).

Traza varias homotecias con el programa Geogebra. Para ello

1. Con la herramienta construye un polígono; da tantos *clics* como vértices tenga el polígono y reelige el primero para cerrar la construcción.
2. Inserta un nuevo punto ; será el centro de homotecia.
3. Elige la opción homotecia desde un punto por un factor de escala

Da *clic* en objeto por escalar (polígono) y después en centro de homotecia; luego inserta un valor.

Mide la longitud entre el punto *H* y cada uno de los vértices del triángulo original; también, la distancia entre la linterna y la sombra obtenida.

a) ¿Qué relación hay entre la distancia linterna-triángulo y linterna-imagen? ______

______

b) ¿Cómo son entre sí los lados correspondientes? ______

c) ¿Cuál es la razón de homotecia? $K =$ ______

d) En este caso, la homotecia es positiva. ¿Qué implica ello? ______

______

En grupo

Con la guía del profesor y con los compañeros reflexionen: ¿Cómo son entre sí los dos triángulos? ¿Qué sucede con el tamaño del objeto y su imagen? ¿Qué ocurre con la forma: conservan una razón o escala? ¿Cómo debe ser la razón si se desea obtener una imagen cuatro veces mayor que la original?

Aprendemos

En equipo

1. **Reúnete en equipo; observen la figura 17.2 y contesten las preguntas:**

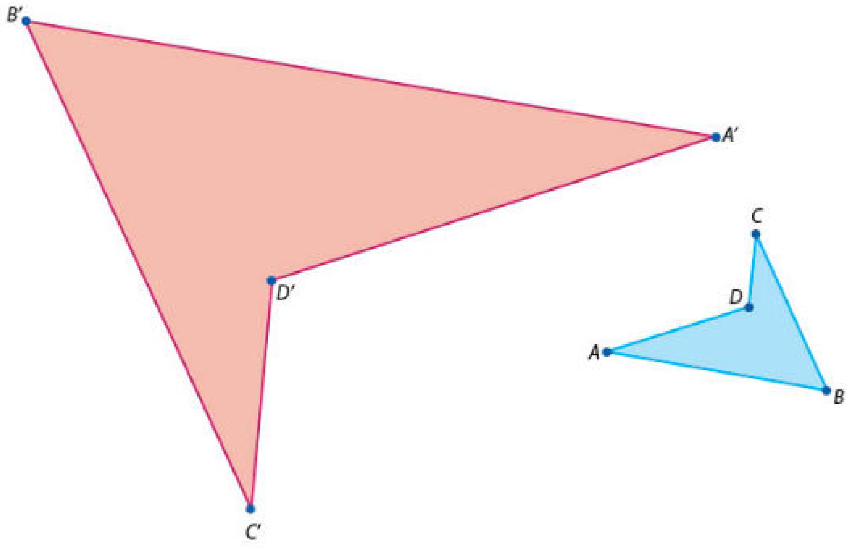


Figura 17.2

a) ¿Cómo son entre sí los ángulos de ambos polígonos? ______

______

Midan con un transportador para verificar.

b) ¿Cómo pueden localizar el centro de homotecia de los cuadriláteros *ABCD* y *A′B′C′D′*?

______

c) Localicen el centro de homotecia y nómbrenlo con la letra *O*.

d) Si las distancias del segmento $\overline{OB} = 3.6$ y el segmento $\overline{OB'} = 10.8$, ¿cuál es la razón de homotecia?

$K =$ ______

e) Escriban en el cuaderno cuánto miden los segmentos originales, ($\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$), los homólogos ($\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$ y $\overline{OD'}$) y cuántas veces caben en sus respectivos segmentos homólogos.

2. **Completen las siguientes razones:**

$$\frac{\overline{OA'}}{\boxed{}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\boxed{}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD'}}{\boxed{}}$$

a) Argumenten por qué se dice que estos dos cuadriláteros tienen razón de homotecia negativa.

______

3. **Con la guía del profesor respondan cómo es la figura homotética si la razón es 1, y si la razón de homotecia es negativa o mayor que 1.**

¡Ya lo aprendimos!

Homotecias inversa y directa

La homotecia supone un caso particular de la semejanza: para que dos objetos la tengan sus lados homólogos deben ser paralelos y las rectas que unen sus vértices homólogos interceptarse en el centro de homotecia.

Hay dos tipos de homotecia:

Directa: Cuando la imagen y su homóloga se encuentran del mismo lado del centro de homotecia; es decir, la constante *k* es positiva.

Inversa: El centro de homotecia se encuentra en medio de la imagen original y su homóloga, en este caso la constante *k*, es negativa.

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Hazlo tú mismo!

1. Observa la figura 17.3. Toma como referencia las rectas y las medidas para responder las preguntas:

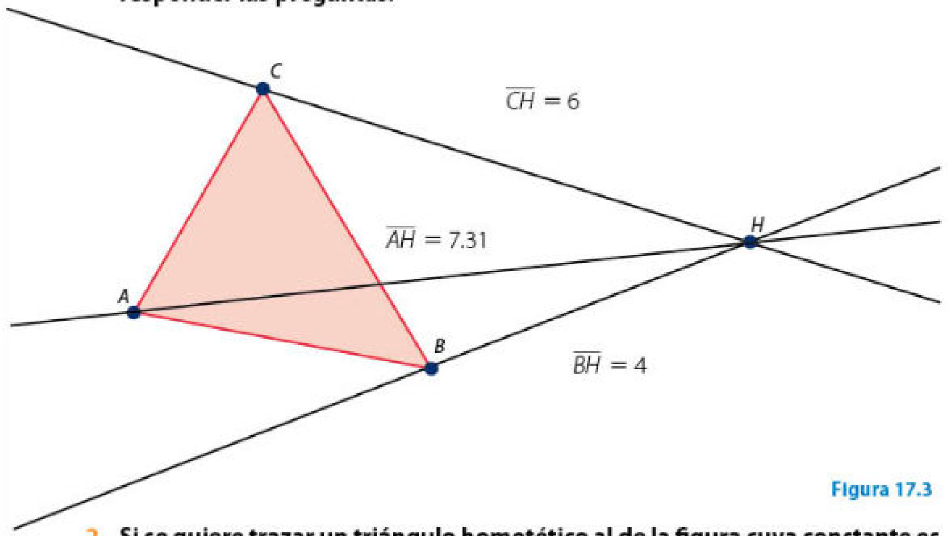


Figura 17.3

2. Si se quiere trazar un triángulo homotético al de la figura cuya constante es 1/3

a) ¿Cuánto medirá el segmento $A'H$? ____________________

b) ¿Cuánto el $B'H$? ____________________

c) ¿Cuánto el $C'H$? ____________________

d) Dibuja el triángulo $A'B'C'$.

3. Analiza la figura 17.4. La copa 2 es la original:

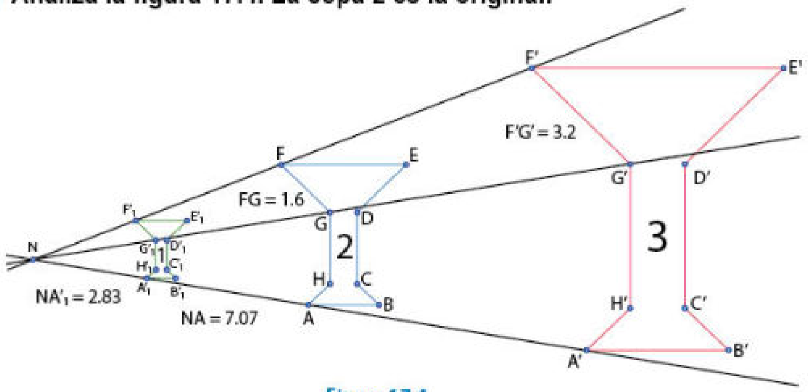


Figura 17.4

a) ¿Qué razón de homotecia se utilizó para dibujar la copa 1? ____________________

b) ¿Cuál para dibujar la 3? ____________________

c) Si el segmento FE mide 3, ¿cuánto mide el $F'E'$? ____________________

En contexto

Según la Organización Mundial de la Salud, en el mundo el 75% de los casos de debilidad visual y ceguera pueden evitarse.
Una persona con miopía tiene dificultades para enfocar bien los objetos distantes. La miopía se corrige con lentes divergentes.
La persona hipermétrope tiene problemas de visión a distancias cortas, pudiendo ver con mayor claridad a distancias largas. Se compensa con el uso de lentes convergentes. Estas son algunas aplicaciones de la homotecia en la medicina.
http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs282/es/
(Consulta: 13 de enero de 2017)

4. Observa la figura 17.5. Efectúa las mediciones necesarias para determinar la constante de la homotecia suponiendo que el cuadrilátero verde es la imagen original. Constante k = ____________________

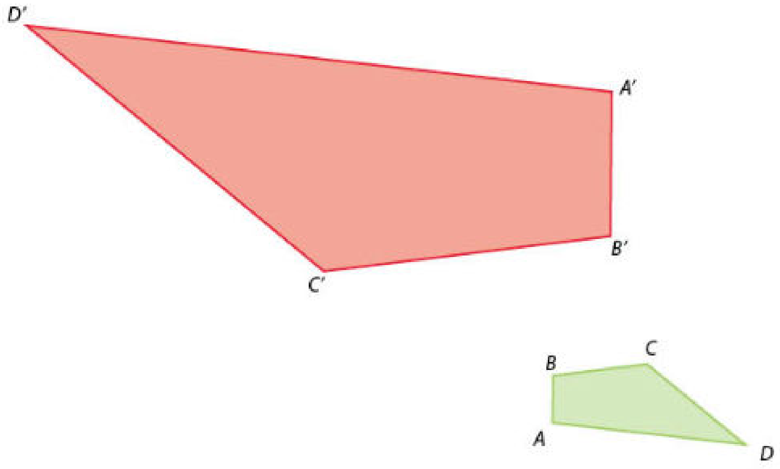


Figura 17.5

5. El funcionamiento de un pantógrafo se basa en geometría elemental y permite así copiar dibujos en escalas mayores o menores que la original. Observa la figura 17.6, identifica el punto de homotecia y responde las preguntas:

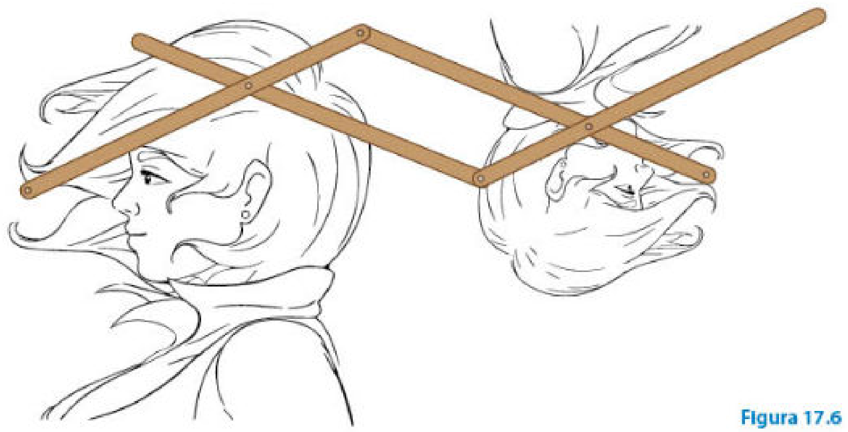


Figura 17.6

a) ¿Cómo asegurar que las imágenes son semejantes? ____________________

b) ¿Cómo encontrar la razón de homotecia? ____________________

c) ¿Cuál es la razón de homotecia? ____________________

d) Investiga cómo funciona un pantógrafo.

Glosario

pantógrafo: instrumento articulado cuyo principio se basa en las propiedades de los paralelogramos. Consta de un pivote y un cruce de palos de madera o metal, con los cuales se puede trazar una copia, ampliar o reducir.

¡Qué curioso!

Aproximadamente en 1603, mientras jugaba a fijar con clavos unas varillas de madera, el matemático alemán Christoph Scheiner observó la presencia de una homotecia. Así surgió el pantógrafo.

Lección 18

Gráficas del movimiento acelerado

Eje: Manejo de la información.
Tema: Proporcionalidad y funciones.
Contenido: Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Es un hecho conocido que si dejas caer un objeto, éste se precipita hacia el piso, en trayectoria recta. A comienzos del siglo XVII, el científico italiano Galileo Galilei estudió el movimiento uniformemente acelerado; para ello dejó rodar esferas por el surco de un plano inclinado de madera, con lo cual disminuyó la aceleración debida a la gravedad de un cuerpo en caída libre. Las limitaciones tecnológicas de la época imposibilitaban la medición de tiempos cortos, por eso se basó en el número de gotas generadas por un reloj de agua.

En esta lección conocerás las características de gráficas asociadas a relaciones funcionales cuadráticas, con el estudio de fenómenos de la física como el movimiento uniformemente acelerado.

Punto de partida

Los ingenieros de cierta empresa constructora diseñan las albercas y los toboganes de un parque acuático. Para efectos de seguridad, realizan pruebas y cálculos de la rapidez con que las personas descenderán.

La figura 18.1 muestra el recorrido de una persona por un tobogán; los puntos corresponden a la distancia recorrida en cierto tiempo. La tabla 18.1 muestra los datos registrados.

	Tiempo	Distancia
Punto *A*	1 segundo	2 metros
Punto *B*	2.5 segundos	12.5 metros
Punto *C*	4 segundos	32 metros
Punto *D*		

Tabla 18.1

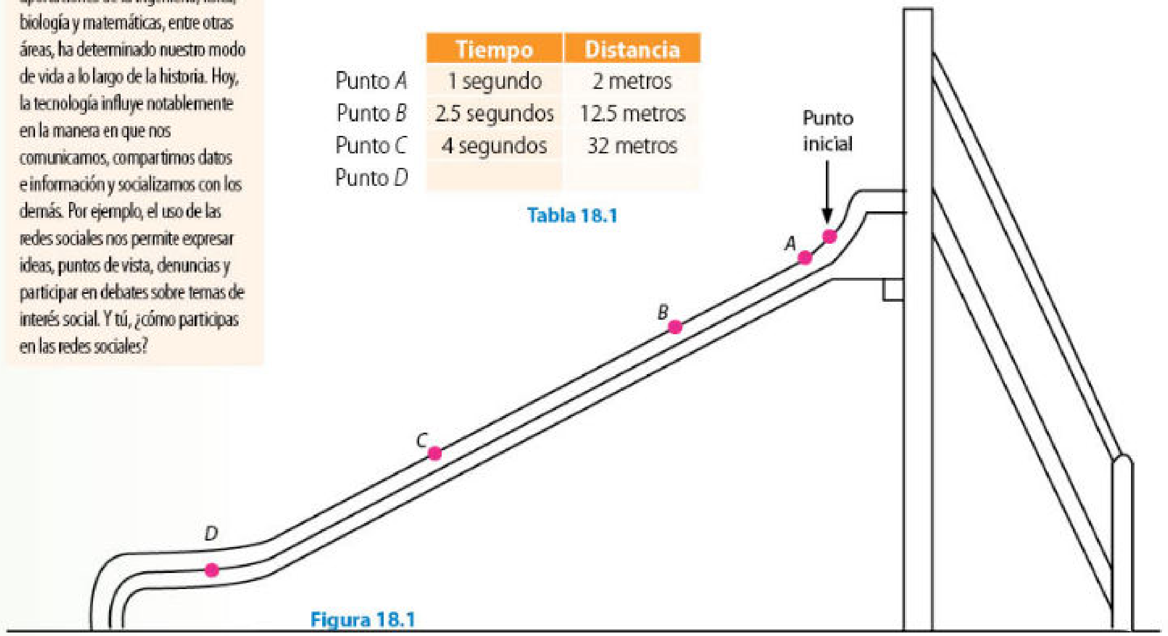


Figura 18.1

a) ¿Qué distancia se recorrió en el primer segundo? ____________

b) ¿Qué distancia se recorrió en 2 segundos? ____________

c) El punto *D* está a 50 metros; ¿en qué tiempo se recorrió esta distancia? ____________

En contexto

En su época, Galileo demostró diversos fenómenos físicos, con procedimientos considerados ahora rudimentarios. El desarrollo de la ciencia y la tecnología, mediante las aportaciones de la ingeniería, física, biología y matemáticas, entre otras áreas, ha determinado nuestro modo de vida a lo largo de la historia. Hoy, la tecnología influye notablemente en la manera en que nos comunicamos, compartimos datos e información y socializamos con los demás. Por ejemplo, el uso de las redes sociales nos permite expresar ideas, puntos de vista, denuncias y participar en debates sobre temas de interés social. Y tú, ¿cómo participas en las redes sociales?

Reúnete con un compañero, analicen la situación anterior y respondan en el cuaderno lo siguiente:

a) ¿Qué procedimientos realizaron para obtener la distancia a partir del tiempo?

b) De acuerdo con los datos obtenidos, ¿consideran que la relación entre la distancia recorrida en el tobogán y el tiempo es una función lineal? Justifiquen la respuesta.

c) En su cuaderno tracen un bosquejo de la gráfica que represente la relación entre la distancia recorrida y el tiempo, ¿qué forma tiene la gráfica?

Compartan las respuestas con otros compañeros. Si obtuvieron diferentes resultados, verifiquen cuáles son correctos y corrijan.

Comparen las gráficas obtenidas e identifiquen lo siguiente: ¿qué forma tiene la gráfica?, ¿qué variable se representó en el eje horizontal?, ¿cuál es la expresión algebraica asociada con la gráfica?

Aprendemos

Individual

1. En una sección del parque acuático se colocarán dos toboganes con diferentes alturas y longitudes. Las tablas 18.2 y 18.3 muestran algunos datos de la distancia recorrida *y* (en metros) y el tiempo *t* (en segundos) calculados para ambos toboganes:

Tobogán A

Tiempo *x* (s)	Distancia *y* (m)
0	0
1	1.5
2	6
3	13.5
4	24

Tabla 18.2

Tobogán B

Tiempo *x* (s)	Distancia *y* (m)
0	0
0.5	0.5
1.5	4.5
2	8
3.5	24.5

Tabla 18.3

a) Revisa las siguientes expresiones algebraicas e identifica cuál representa el movimiento en el tobogán A y cuál en el tobogán B:

$y = 4x^2 + 0.5$	$y = 1.5x$	$y = (2x)^2$
$y = 1.5x^2$	$y = 2 + x^2$	$y = 2x^2$

b) ¿Cuál expresión representa la relación entre el tiempo x y la distancia y en el tobogán A?

c) ¿Cuál expresión representa la relación entre el tiempo x la distancia y en el tobogán B?

d) ¿Las expresiones que modelan el movimiento en los toboganes son funciones cuadráticas? ________ ¿Qué significa esto? Explica. ________

Acuérdate de...

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se intersecan en un punto llamado *origen*. La recta horizontal se conoce como *eje de las abscisas*, y la recta vertical como *eje de las ordenadas*.

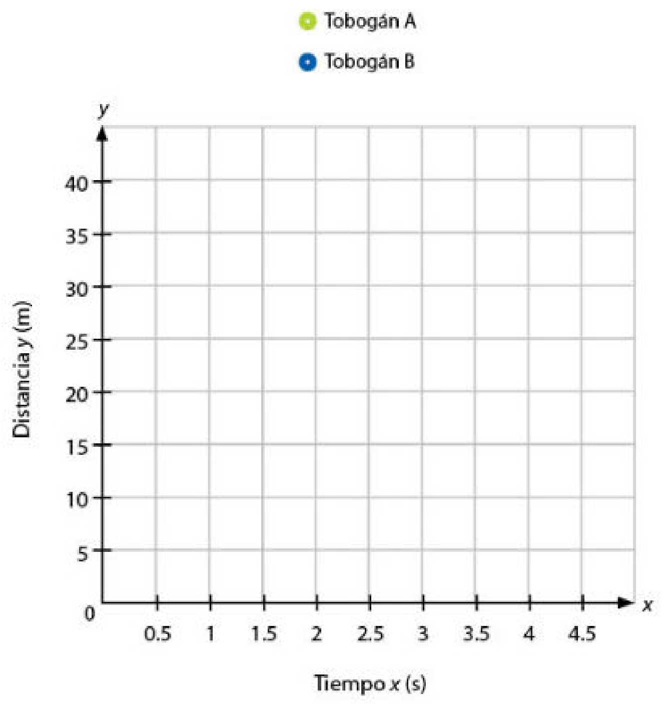
Dicho plano sirve para describir la posición de puntos representados por sus coordenadas.

El plano cartesiano toma su nombre de su creador, el filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650).

2. Usa los datos de las tablas 18.2 y 18.3, y en el plano cartesiano de la figura 18.2 realiza lo siguiente:

a) Con color verde ubica los puntos de coordenadas (x, y) que describen el movimiento en el tobogán A. Únelos para obtener la gráfica.

b) Con color azul ubica los puntos correspondientes al tobogán B. Únelos para obtener la gráfica.



Gráfica 18.1. Movimiento de los toboganes.

3. Con un compañero analicen las gráficas obtenidas y respondan lo siguiente:

a) En el tobogán B, ¿qué distancia se recorrió a los 3 segundos? Ubica el punto de coordenadas (x, y) en el plano cartesiano.

b) En el tobogán A, ¿qué distancia se recorrió a los 2.5 segundos? Ubica este punto.

c) ¿Qué distancia se recorrió a los 4 segundos en ambos toboganes? Ubica los puntos.

d) Cuando el tiempo es igual a 1 segundo, ¿en qué tobogán se recorrió mayor distancia?

e) Cuando el tiempo es igual a 3 segundos, ¿en qué tobogán se recorrió mayor distancia? ________

f) De acuerdo con sus resultados, ¿en qué tobogán el descenso es más rápido? Expliquen. ________

Acuérdate de...

En el curso de física de segundo grado estudiaste que la rapidez de un móvil se define como la razón de la distancia recorrida en cierto tiempo. De esa manera, al comparar dos razones correspondientes al movimiento de dos cuerpos diferentes, es más rápido el que tenga mayor razón de la distancia por tiempo.

4. Compartan las respuestas con compañeros. Comparen sus gráficas y comenten lo siguiente:

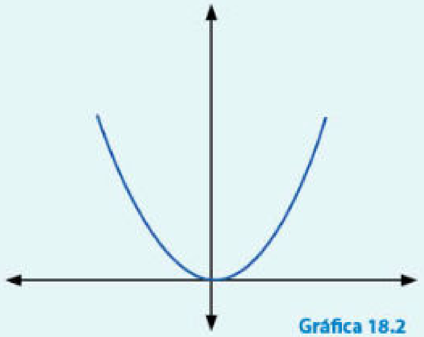
a) ¿Qué forma tienen las gráficas construidas?

b) Expliquen qué características identifican en las gráficas asociadas a funciones cuadráticas.

Escriban en el cuaderno sus conclusiones.

¡Ya lo aprendimos!

En los problemas anteriores estudiaste el movimiento de un cuerpo con aceleración constante. Como resultado encontraste que la relación entre la distancia recorrida por un cuerpo que se desplaza por un plano inclinado y el tiempo que emplea en ello, se modela con una *función cuadrática* de la forma $y = kx^2$, donde k es una constante.



Gráfica 18.2

También observaste que la gráfica asociada a dicho movimiento es una curva. A este tipo de gráfica se le conoce como *parábola*.

La gráfica 18.2 es una parábola. Observa que la gráfica que representa el movimiento de un cuerpo por un plano inclinado, corresponde a la **parte derecha de una parábola.**

En conclusión, cuando la gráfica es una parábola, entonces la relación es cuadrática. Así, relaciones como $y = 2x^2 + 1.5x$, $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1.5x + 3$ o $y = 2x^2 + 3$, donde la x está elevada al cuadrado y se tienen términos de grado uno o de grado cero, su gráfica es una parábola.

5. Considera las funciones cuadráticas $y = 3x^2 + 1$, $y = x^2 + 1$, $y = 3x^2 - 2$. Calcula los valores de y para cada valor de x que se indica y completa las tablas.

x	$y = 3x^2 + 1$
–2	
–1	
0	
1	
2	

Tabla 18.4

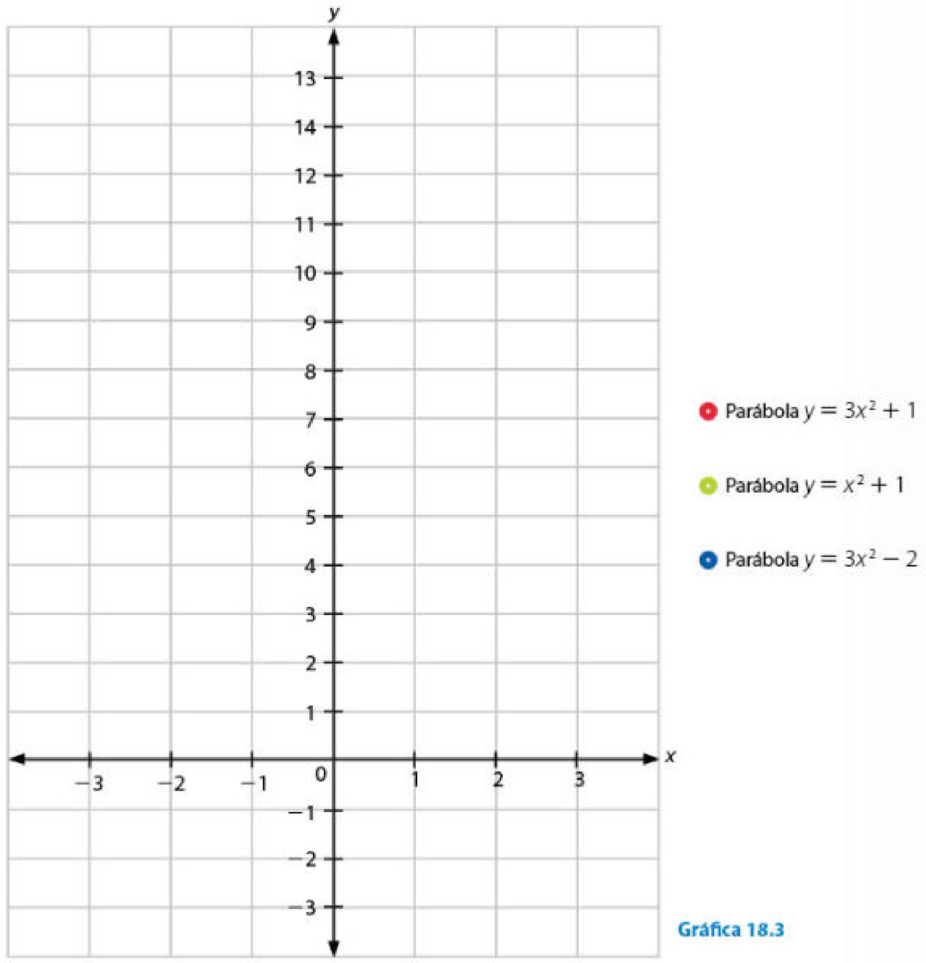
x	$y = x^2 + 1$
–2	
–1	
0	
1	
2	

Tabla 18.5

x	$y = 3x^2 - 2$
–2	
–1	
0	
1	
2	

Tabla 18.6

6. En el plano cartesiano de la gráfica 18.3, ubica los puntos de coordenadas (x, y) que calculaste en las tablas anteriores y traza las gráficas de las expresiones correspondientes. Para cada gráfica usa el color indicado.



Gráfica 18.3

a) Observa las gráficas que obtuviste y completa la siguiente tabla:

Expresión	¿En qué punto (x, y) interseca la parábola al eje y?	¿Qué valor en x tiene el punto?	¿Qué valor en y tiene el punto?	En la expresión, ¿cuál es el coeficiente del término cuadrático?
$y = 3x^2 + 1$				
$y = x^2 + 1$				
$y = 3x^2 - 2$				

Tabla 18.7

- ¿Qué parábolas intersecan el eje *y* en el mismo punto? ______________

  Explica por qué. ______________

- Identifica las expresiones cuyas parábolas intersecan el eje *y* en el mismo punto que en la parábola $y = 3x^2 - 2$.

  $y = 3x^2 + 2$ $\quad$ $y = -2x^2$

  $y = x^2 - 2$ $\quad$ $y = 2x^2 - 2$

b) Explica qué condición deben cumplir las gráficas asociadas a dos o más funciones cuadráticas para tener el mismo punto de intersección con el eje *y*.

____

c) ¿Qué parábolas están más abiertas? ______________

Explica por qué. ______________

- ¿Qué expresiones tienen el menor coeficiente del término cuadrático?

  ____

- Identifica las expresiones cuyas parábolas estén menos abiertas que la parábola $y = 3x^2 - 2$.

  $y = 3x^2 - 2$ $\quad$ $y = 4x^2$

  $y = -4x^2 + 2$ $\quad$ $y = 5.5x^2 - 2$

d) Explica qué condición debe cumplir la gráfica asociada a una función cuadrática para estar más abierta que otra.

____

Reúnete con compañeros y compartan las respuestas. Comenten las características halladas de las parábolas y, en el cuaderno, escriban las conclusiones.

TIC y más

Para practicar más la construcción de gráficas de funciones cuadráticas, consulta el recurso interactivo Gráficas no lineales en la dirección electrónica www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T1_text_final_es.html (Consulta: 24 de enero de 2017)

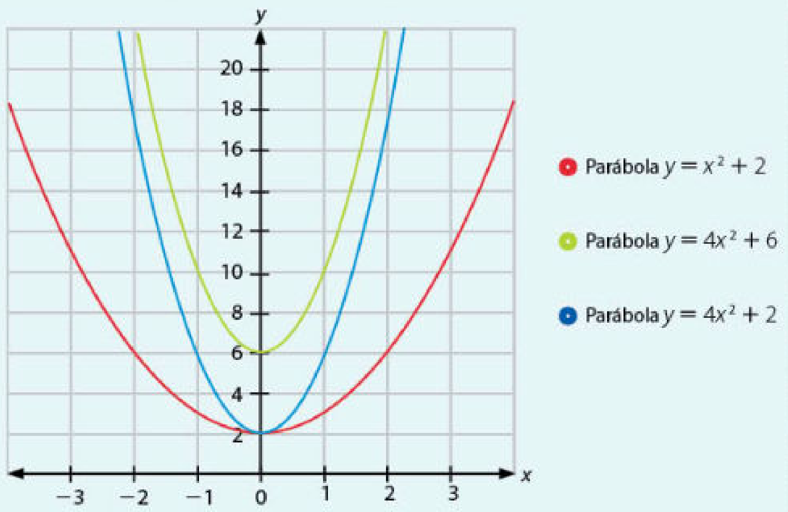
¡Ya lo aprendimos!

Como vimos, la gráfica de una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + b$ es una curva llamada parábola. En esta expresión, el **número *a*** es el **coeficiente del término cuadrático** y el **número *b*** se conoce como **ordenada al origen.**

En la expresión $y = ax^2 + b$, el número *a* indica la **abertura** de la parábola. Así, la parábola estará más abierta en tanto menor sea *a*, y viceversa.

Por otra parte, la ordenada al origen cumple las siguientes **propiedades:**

- Resulta al evaluar la expresión $y = ax^2 + b$, cuando $x = 0$.
- Es la ordenada del punto $(0, b)$ donde la parábola $y = ax^2 + b$ y el eje *y* se intersecan.



Por ejemplo, la parábola $y = x^2 + 2$ está más abierta que las otras, pues su coeficiente del término cuadrático es menor; esto es, $1 < 4$.

Además, tanto la parábola $y = x^2 + 2$ como la $y = 4x^2 + 2$ intersecan al eje *y* en el punto (0, 1); su ordenada al origen es 1.

¡Hazlo tú mismo!

1. Para cada una de las siguientes parábolas obtén la ordenada al origen:

Parábola	Ordenada al origen	Coeficiente del término cuadrático
$y = 5x^2 - 2$		
$y = 2.5x^2 - 1$		
$y = \frac{1}{5}x^2 - 2$		

Tabla 18.8

a) ¿Qué parábola está más abierta? ______________

2. En el cuaderno construye un plano cartesiano y grafica las parábolas. Verifica tus respuestas.

Lección 19

Rectas y curvas

Eje: Manejo de la información.
Tema: Proporcionalidad y funciones.
Contenido: Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Las gráficas nos ayudan a presentar información de manera organizada, clara y concisa. Son representaciones que exponen la relación entre dos conjuntos de cantidades; por ejemplo, el número de nacimientos en cierto tiempo, la cantidad de jóvenes con estudios por entidad federativa, la distancia recorrida por un auto o el consumo de combustible, entre muchos otros fenómenos. De ahí la importancia de entenderlas e interpretarlas correctamente.

En esta lección estudiarás gráficas formadas por segmentos de recta y curvas; aprenderás a construirlas y a interpretar su información al analizar hechos de la vida cotidiana.

Punto de partida

La figura 19.1 muestra el diseño a escala de dos albercas que se construirán en un parque acuático, cada una con su llave. Ambas llaves surtirán la misma cantidad de agua; esto es, llenarán los depósitos con el mismo flujo constante.

Analiza lo siguiente y responde en el cuaderno:

Considera que ambas albercas están vacías y empiezan a llenarse al mismo tiempo.

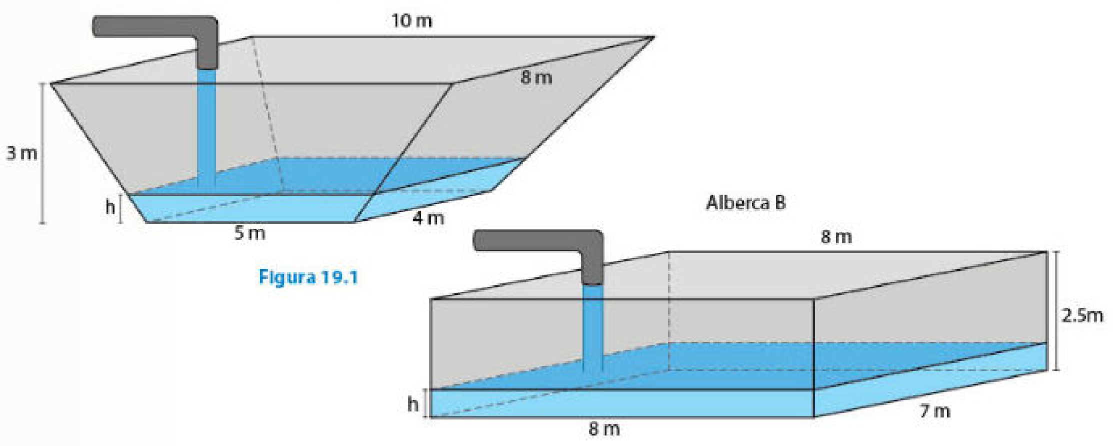


Figura 19.1

a) Al inicio, ¿cuál se llenará más rápido? ________

b) ¿En cuál alberca la altura *h* del nivel del agua llegará a la mitad de su altura total antes que el otro? ________

c) ¿Una alberca se llenará por completo antes que la otra? Justifica la respuesta.

d) ¿Qué volumen de agua puede contener cada alberca? Compara tus resultados e identifica si alguna alberca tiene mayor volumen o no que la otra. ________

e) ¿La forma de la alberca influye en el tiempo de llenado? Explica. ________

Comparte tus respuestas con otros y verifiquen si obtuvieron los mismos resultados.

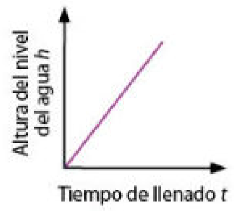
Acuérdate de...

En tu curso de Física de 2º grado de secundaria estudiaste que el flujo o caudal (Q) se define como la cantidad de fluido (o volumen, V) que pasa por una misma sección transversal en cierto tiempo (t).
Matemáticamente, el flujo se expresa como $Q = \frac{V}{t}$
Sus unidades convencionales son $\frac{m^3}{s}$.

Aprendemos

Individual

1. **Las siguientes gráficas representan la relación de la altura *h* del nivel de agua respecto al tiempo *t* de llenado de las albercas A y B.**



Gráfica 19.1

Gráfica 19.2

Gráfica 19.3

Gráfica 19.4

a) ¿Cuál gráfica corresponde al llenado del depósito A? ________ Explica por qué.

b) ¿Cuál gráfica corresponde al llenado del B? ________ Explica por qué. ________

c) Dibuja en el cuaderno los modelos de alberca cuyo llenado se represente en las gráficas que no elegiste en los incisos anteriores.

d) ¿Qué situación representa la gráfica 19.4 en relación con el llenado de los depósitos?

Analicen las gráficas de la actividad e identifiquen lo siguiente: ¿qué forma tiene cada gráfica?, ¿cuál variable se representó en el eje horizontal y cuál en el vertical?, ¿cómo es la forma de la expresión algebraica asociada a cada gráfica?

2. **En una sección del parque acuático se colocará una alberca con la forma y las medidas mostradas en la figura 19.2:**

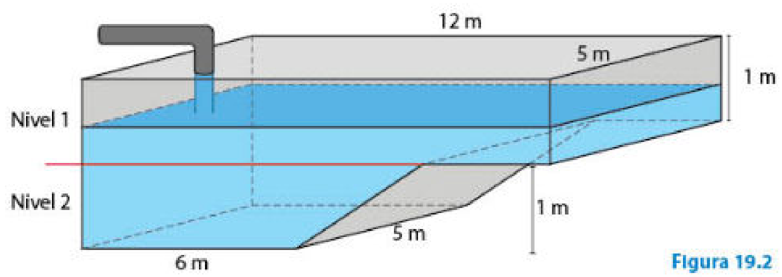


Figura 19.2

a) ¿Cuál de los niveles de la alberca representa mayor volumen? ________

b) Si la llave surtirá agua con un flujo constante, ¿cuál de los dos niveles se llenará en mayor tiempo? ________
Explica por qué. ________

En contexto

El agua es un recurso vital, sin ella simplemente no habría vida; por eso hoy más que nunca debemos hacer conciencia sobre su cuidado.
El agua es fundamental para la salud e higiene humana; pero, ¿sabías que la llave abierta de un lavabo puede gastar entre 6 y 15 litros por minuto?, ¿y que una fuga pequeña en el inodoro puede gastar 4 400 litros por año?, ¿y que una regadera para ducha gasta de 10 a 23 litros por minuto si la dejas abierta? Has cuentas y sabrás que no cerrar las llaves y no arreglar las fugas representan un desperdicio enorme de agua y de dinero.
Ahora que sabes esto, ¿qué vas a hacer?
Fuente: Instituto Nacional de Ecología (INE).

c) Observa la figura de la alberca C y analiza cómo cambia la altura del nivel del agua al transcurrir el tiempo. Marca con ✔ los enunciados verdaderos (V) o falsos (F):

	V	F
El nivel 2 se llena en el mismo tiempo que el 1 porque ambos tienen 1 m de altura.		
La altura del nivel del agua aumenta de manera constante porque el flujo que arroja la llave es constante: cada segundo ingresa la misma cantidad.		
El volumen del nivel 2 es mayor que el del 1; por tanto, éste se llena más rápido que aquél.		

Tabla 19.1

3. **En la gráfica 19.5 construye un bosquejo de la curva que represente el llenado de la alberca C.**

Gráfica 19.5

a) ¿Qué forma tiene la parte de la gráfica que representa el llenado de la alberca en el nivel 1? ______________________

b) ¿Qué forma tiene la parte de la gráfica que representa el llenado de la alberca en el nivel 2? ______________________

c) Analiza la gráfica y marca con ✔ los enunciados verdaderos (V) o falsos (F):

	V	F
La parte de la gráfica asociada al nivel 1 es una recta ascendente que inicia en el origen 0.		
La parte de la gráfica asociada al nivel 2 es una recta ascendente.		
La parte de la gráfica que modela el llenado de la alberca en el nivel 1 es una curva.		
Según la parte de la gráfica del nivel 1, conforme aumenta el tiempo de llenado t la altura h de la columna de agua aumenta de forma constante.		
El volumen de la alberca en el nivel 2 es mayor que en el 1.		
La gráfica que muestra el llenado de la alberca está formada por dos partes: inicia con una curva que continúa con una recta ascendente.		

Tabla 19.2

Acuérdate de...

Una relación funcional lineal se representa por una expresión algebraica de la forma $y = mx + b$ y su gráfica es una **recta**.

Una función cuadrática se representa por una expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + bx + c$ y su gráfica es una **curva**.

4. **Completa la tabla 19.3 con la figura del recipiente, la explicación de cómo es su llenado o con la construcción de la gráfica, según corresponda:**

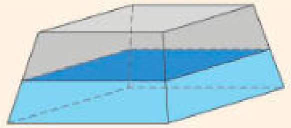
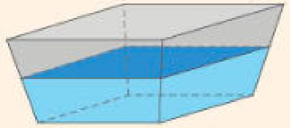
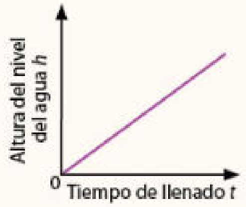
Recipiente A	Recipiente B	Recipiente C
		
	El nivel del agua aumenta de manera constante, pues a mayor altura se requiere el mismo volumen de agua para llenar el recipiente.	Al inicio el nivel del agua aumenta de manera rápida y luego más lenta, pues a mayor altura se requiere mayor volumen de agua para llenar el recipiente.
		

Tabla 19.3

Comparte tus respuestas con otros compañeros. Comenten qué características identifican en las gráficas estudiadas en esta lección y qué vínculo tienen con la forma del recipiente que se llena con agua.

¡Ya lo aprendimos!

En los problemas anteriores estudiaste situaciones de llenado de recipientes mediante un flujo constante de agua. Como resultado, te diste cuenta que hay una relación entre la altura h que alcanza el nivel de agua en el recipiente y el tiempo de llenado t; la **gráfica** asociada se forma por partes **rectas y curvas**, lo cual depende de la forma del recipiente.

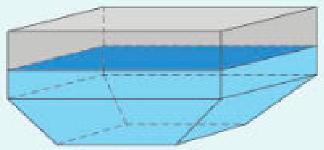
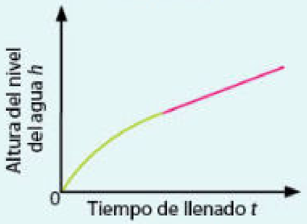


Figura 19.3



Gráfica 19.6

Así, por ejemplo, la gráfica 19.6 representa el aumento del nivel del agua respecto al tiempo para el recipiente de la figura 19.3.

En la sección inferior del recipiente el nivel de agua aumenta de manera rápida y luego más lenta, pues a mayor altura se requiere mayor volumen. Por ello, la parte de la gráfica que le corresponde es una curva.

En la sección superior del recipiente, el nivel de agua aumenta de manera constante, pues a mayor altura requiere el mismo volumen. La parte de la gráfica que le corresponde es una recta.

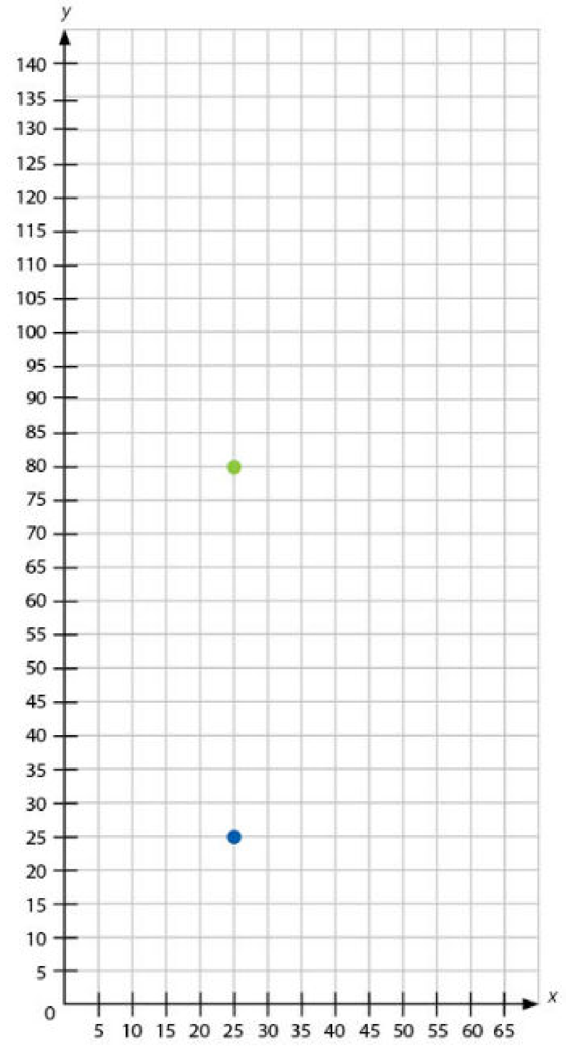
En ciertas situaciones, la gráfica asociada a dos cantidades que varían entre sí es la unión de dos o más segmentos de rectas o curvas.

5. **La tabla 19.4 muestra los datos de la distancia recorrida y el tiempo registrados en un entrenamiento de carrera a campo traviesa entre dos atletas:**

a) Completa las rectas de la gráfica 19.7 con los datos de la tabla 19.2 correspondientes a cada corredor. Usa color azul para la gráfica del corredor A y verde para el corredor B.

	Corredor A	Corredor B
t (s)	*d* (m)	*d* (m)
0	0	20
5	5	20
10	10	20
15	15	45
20	20	65
25	25	80
30	35	90
35	50	95
40	70	100
45	95	105
50	110	110
55	125	115
60	140	120

Tabla 19.4



Gráfica 19.7

6. **Analiza las rectas que trazaste en la gráfica 19.7 y responde:**

a) Describe cómo es la gráfica que representa la relación de la distancia recorrida y el tiempo correspondiente al corredor A. ______________________

____

b) Describe cómo es la gráfica que representa la relación de la distancia recorrida y el tiempo correspondiente al corredor B. ______________________

____

c) Uno de los corredores inició la carrera varios metros adelante del otro. ¿Quién fue? ______________ ¿De cuántos metros se trató? ______________

d) Un corredor avanzó de manera constante al inicio, luego fue cada vez más rápido y al final nuevamente se desplazó de manera constante. ¿Qué corredor fue?

____

e) Describe cómo avanzó el otro corredor. ______________________

____

f) ¿En qué tiempo y distancia los corredores coinciden y se encuentran? ______________

g) ¿Qué corredor recorrió mayor distancia al término del tiempo total? ______________

Reúnete con otros compañeros y compartan sus respuestas. Comenten las características de las gráficas trazadas y en el cuaderno escriban sus conclusiones.

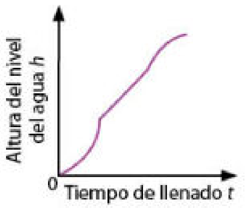
TIC y más

Para practicar más la construcción de gráficas formadas por segmentos de recta y curvas, consulta el recurso interactivo Gráficas por pedazos, en la dirección electrónica http://bibliotecaescolardigital.es/comunidad/BibliotecaEscolarDigital/recurso/graficas-por-pedazos/ee608cec-1577-4813-a456-f7bbda47a2d4 (Consulta: 24 de enero de 2017)

¡Hazlo tú mismo!

1. **Analiza las siguientes gráficas y responde las preguntas; considera que el recipiente de la figura 19.4 se llena con un flujo constante de agua.**

Gráfica 19.8



Gráfica 19.9

Gráfica 19.10

Gráfica 19.11

a) ¿Qué gráfica representa la variación de la altura del nivel de agua que tiene el recipiente en función del tiempo transcurrido? ______________

b) Dibuja en el cuaderno un recipiente cuyo llenado de agua se representa en la gráfica 19.8.

c) Explica la situación que representa la gráfica 19.11 en relación con el llenado de recipientes.

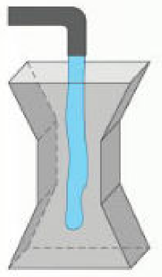
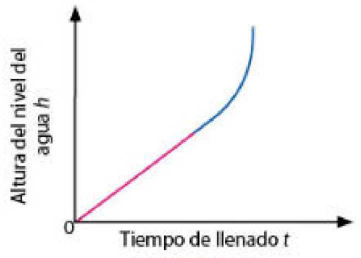


Figura 19.4

2. **En el cuaderno construye un recipiente cuya gráfica de llenado sea la gráfica 19.12**



Gráfica 19.12

Lección 20

Eje: Manejo de la información.
Tema: Nociones de probabilidad.
Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Probabilidad de eventos independientes

Muchos experimentos aleatorios implican un conjunto de eventos. En ocasiones, algunos de éstos eventos no se afectan entre sí: hay independencia de unos y otros. En cambio, otras situaciones pueden incluir eventos que sí se afectan entre sí. En cualquiera de esos casos, para calcular las probabilidades correctamente es necesario saber si un evento influye en el resultado de otros.

En esta lección analizarás experimentos donde identificarás cuando dos eventos son independientes, y calcularás la probabilidad correspondiente.

Punto de partida

Un programa de concursos tiene el juego *Tu premio es*, que, como se muestra en la figura 20.1, consiste en lo siguiente:

- El juego consta de dos tómbolas, una azul y una verde, y siete esferas iguales.
- En la tómbola azul hay cinco esferas identificadas, cada una con un número del 1 al 5.
- La tómbola verde contiene dos esferas iguales: una marcada con ✓: y otra, con ✗.
- Ambas giran para revolver las esferas. El jugador presiona un botón y, al mismo tiempo, sale una esfera de cada tómbola.
- El número de las esferas de la tómbola azul determina el premio que el jugador puede ganar. El valor de las esferas contenidas en la verde determina si obtiene o no ese premio: si sale ✓, lo gana, y lo pierde si sale ✗.

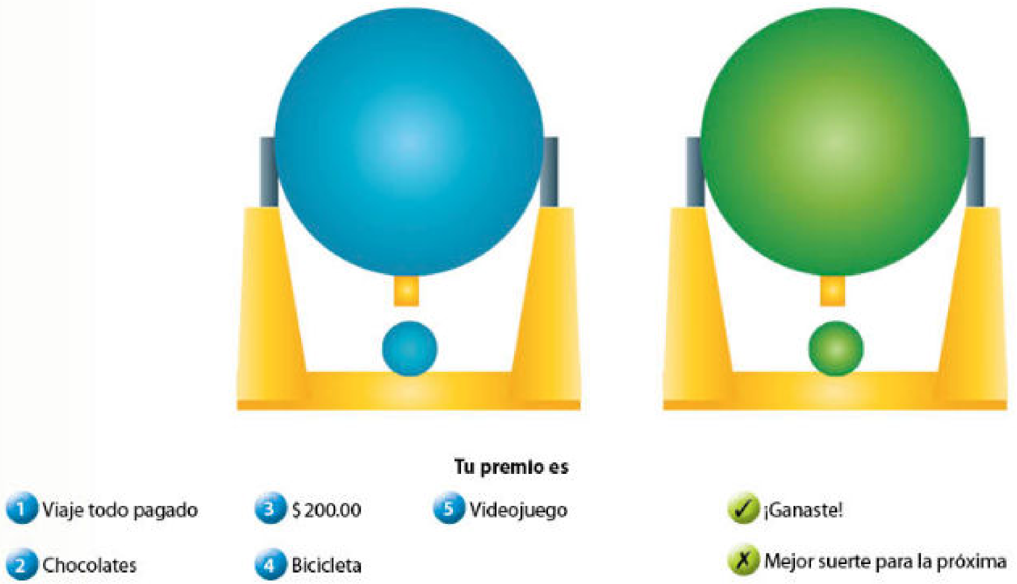


Figura 20.1

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar un premio? ______

b) ¿Qué es más probable: ganar un viaje todo pagado o una bicicleta?

______

c) ¿Cuántos resultados pueden obtenerse en el juego? ______

d) Escribe dos resultados que te gustaría obtener si participaras en este juego.

______

e) ¿Obtener ✓ o ✗ depende del número que salga en la tómbola azul?

______

Compara con otros compañeros las respuestas y comenten los procedimientos seguidos en los diferentes casos.

Acuérdate de...

El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados sencillos posibles de un experimento. Una forma de representar el espacio muestral es mediante un **diagrama de árbol**.

Aprendemos

Individual

1. **Completa el diagrama de árbol correspondiente al espacio muestral del juego *Tu premio es*:**

   a) ¿De cuántos resultados posibles se forma el espacio muestral? ______

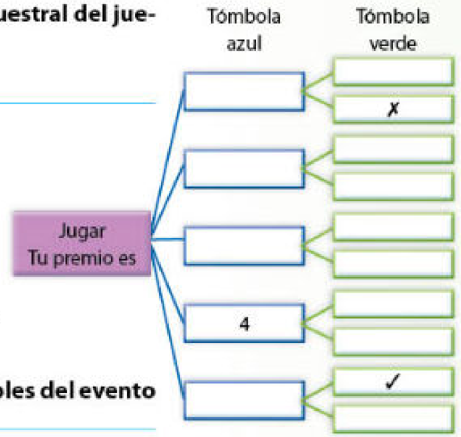


Figura 20.2

2. **Considera los siguientes eventos:**

   a) Evento *A*: Sale 4 en tómbola azul.

   b) Evento *B*: Sale ✓ en tómbola verde.

   c) Evento *C* (ocurren *A* y *B*): Salen 4 en tómbola azul y ✓ en verde.

3. **En el diagrama de árbol marca con rojo los resultados favorables del evento *A*. ¿Cuántos son?** ______

   a) Calcula la probabilidad del evento *A*: P(A) = —— =

4. **Marca con azul los resultados favorables del evento *B*. ¿Cuántos son?** ______

   a) Calcula la probabilidad del evento *B*: P(B) = —— =

5. **¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *C*; es decir, salen 4 en la tómbola azul y ✓ en la verde al mismo tiempo?** ______

   a) Calcula la probabilidad del evento *C*: P(C) = —— =

Acuérdate de...

Un **evento** se define por alguno o algunos de los resultados posibles de un experimento. Por ejemplo, al lanzar un dado (no cargado) los correspondientes son "cae número mayor que 5", {6}, y "cae un número impar" {1, 3, 5}.

Un **evento compuesto** acontece cuando se combinan dos. Por ejemplo, "cae número mayor que 5 y es impar".

b) Multiplica los valores de la probabilidad obtenidos para los eventos *A* y *B*.

P(A) × P(B) = ________ × ________ = ________

c) Compara la probabilidad del evento *C* con el producto de las probabilidades de *A* y *B*. ¿Cómo son estos valores? ________

- En función de tu respuesta, completa la siguiente expresión:

P(☐) ☐ P(A) × P(☐)

¡Ya lo aprendimos!

En un experimento aleatorio, dos eventos (digamos *M* y *N*) son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de que suceda el otro. De manera que, la probabilidad de que los dos eventos ocurran simultáneamente es igual al producto de la probabilidad de ambos eventos; esto se puede representar como sigue:

***M* y *N* son eventos independientes si P(M y N) = P(M) × P(N)**

Por ejemplo, al lanzar simultáneamente un dado y una moneda (no cargados) se tienen los eventos *M:* Cae número par en el dado y *N:* Cae sol en la moneda; la probabilidad de que ocurran ambos eventos (*M* y *N*) es igual al producto de la probabilidad de que ocurra cada uno de manera individual. Compruébalo.

Reúnete con otros compañeros y comparen sus resultados. Identifiquen algunos juegos aleatorios como concursos, rifas y juegos de mesa, donde haya eventos independientes y dependientes.

Definan algunos eventos asociados a los juegos elegidos y verifiquen si son o no independientes.

6. **Elena es una concursante del juego *Tu premio es*. Antes de efectuar el juego, el conductor del programa le pregunta –¿Cuál es el premio que quieres ganar?; y Elena responde –*El viaje todo pagado*. Entonces el conductor le propone –*Si en tu primer intento sale ✗, tendrás un segundo intento de ganar el premio 1 pero meteremos otra esfera ✗ en la tómbola verde. ¿Aceptas el reto?***

Elena acepta el reto porque le parece justo.

a) ¿Te parece justo el juego planteado así? ______ Explica por qué. ________

b) Considera ahora los siguientes eventos:

D: Sale 1 en el primer intento.

E: Sale 1 en el segundo intento.

F: Sale 1 en ambos intentos.

Calcula la probabilidad para cada evento:

P(D) = —— = P(E) = —— = P(F) = —— =

c) De acuerdo con tus resultados, ¿los eventos *D* y *E* son independientes? ______

Explica por qué. ________

¡Ya lo aprendimos!

En el problema 6 se plantea una situación que modifica el planteamiento original del juego (o experimento): al introducir una esfera ✗ en la tómbola verde, la probabilidad de obtener ese valor (✗) en la segunda ocasión aumenta; por tanto, los eventos no son independientes.

Dos eventos son dependientes si la ocurrencia de uno afecta la probabilidad de ocurrencia del otro; esto es:

***M* y *N* son eventos dependientes si P(M y N) ≠ P(M) × P(N)**

Si en el juego no se quitan ni se aumentan esferas, la probabilidad de ocurrencia de sacar cualquier esfera es la misma en la oportunidad que sea: el resultado de un experimento no afecta el del otro. Por tanto, los eventos son independientes.

7. **Una fábrica recibe 20 solicitudes de empleo para ocupar una vacante en el departamento de contabilidad. El licenciado Godínez, encargado de revisar la documentación, encuentra lo siguiente:**

- 10 solicitudes de hombres (evento *S*)
- 15 solicitudes de personas con experiencia en el puesto (evento *T*)
- 5 solicitudes de hombres y con experiencia en el puesto (evento *S* y *T*)

a) ¿Cuántos resultados posibles tiene el espacio muestral de esta situación?

____

b) Calcula la probabilidad de cada evento:

P(S) = —— = P(T) = —— = P(SyT) = —— =

c) De acuerdo con tus resultados, ¿son los eventos *S* y *T* independientes o dependientes? ______ Explica por qué. ________

8. **En la tabla 20.1 se han descrito algunos experimentos aleatorios. Explica si los eventos que se describen para cada experimento son independientes o no:**

Experimento	Eventos	¿Los eventos son dependientes o independientes?
a) Tirar un dado; si no sale 6, se efectúa otro tiro. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 6 en el segundo tiro? ______	*D:* El primer lanzamiento no es un 6. *E:* El primer lanzamiento es un 6.	
b) Se tiene una bolsa opaca con dos pelotas amarillas, dos negras y una azul. Extraes una pelota, observas el color y la regresas a la bolsa. Luego, sacas otra. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota amarilla en ambas extracciones? ______	*F:* Sacar una pelota amarilla en el primer intento. *G:* Sacar una pelota amarilla en el segundo intento.	
c) Lanzas simultáneamente una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila y 4? ______	*C:* Obtener águila. *D:* Obtener 4.	

Tabla 20.1

9. **Carlos tiene en el reproductor de música una lista con 12 canciones favoritas de los siguientes géneros: 4 de rock, 2 de pop, 3 de electrónica, 1 de jazz y 2 de alternativo.**

a) Si reproduce en modo aleatorio la lista, ¿cuál es la probabilidad de que la canción sea de pop? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la canción no sea de jazz? ______

c) ¿Los eventos anteriores son independientes? ______

d) Carlos quiere escuchar canciones de rock. Si al reproducir la lista en el primer intento la canción no es de rock, volverá a activar la reproducción aleatoria; y así sucesivamente hasta tocar una canción de rock.

- ¿Cuál es la probabilidad de tocar una canción de rock en su tercer intento? Para responder considera los siguientes eventos y calcula la probabilidad de cada uno:

M: Tocar una canción que no es de rock. P(M) =

N: Tocar una canción que no es de rock. P(N) =

O: Tocar una canción de rock. P(O) =

e) ¿Los eventos *M*, *N* y *O* son independientes? ______

Explica. ______

f) Si en el segundo intento Carlos borra de la lista una canción que no es de rock, ¿afecta esto la probabilidad del evento *O*? ______

¿Qué valor adquiere? ______

En grupo

Comparte los resultados con otros compañeros. Comenten qué relación tiene la probabilidad de un evento con la de que éste no ocurra.

¡Hazlo tú mismo!

Resuelve en el cuaderno los siguientes problemas.

1. **Mario tiene un mazo de 15 cartas, numeradas del 1 al 15. Saca una al azar, ve el número y la revuelve de nuevo.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga el mayor o el menor número en el primer intento?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga el mayor o el menor número en el segundo intento?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que *no* le salga una carta inferior o igual a 5 en el primer intento, pero que sí le salga una carta inferior o igual a 5 en el segundo?

e) Si después de extraer una carta Mario no la devuelve al mazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener el mayor o el menor número en el segundo intento?

TIC y más

Para practicar más problemas de razón de cambio, consulta el recurso interactivo *Probabilidad. Eventos independientes* en la dirección electrónica https://es.khanacademy.org/math/probability/independent-dependent-probability/independent-events/v/compound-probability-of-independent-events (Consulta: 24 de enero de 2017)

Evaluación por competencias

Lee cada situación y elige la respuesta correcta:

Situación 1. Cierto diseñador gráfico dibuja en la computadora un cartel en forma de cuadrado. Decide incrementar la longitud del lado en 20 cm, de tal manera que el área del nuevo anuncio es $\frac{3}{2}$ más grande que la del original.

1. **¿Cuál ecuación debe resolverse para solucionar el problema anterior?**

   a. $x^2 - 80x - 800 = 0$ *c.* $x^2 - 8x - 80 = 0$

   b. $x^2 + 80x + 800 = 0$ *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **¿Cuáles son las medidas del nuevo cartel?**

   a. 88.98 cm *b.* 98.88 cm *c.* 90 cm *d.* Otras. Escríbelas. ________

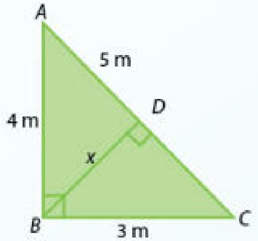


Figura 3.1

Situación 2. Un terreno rectangular tiene 52 m² de área y su perímetro es de 34 m. Se desconocen las medidas de los lados.

1. **¿Cuál ecuación debe resolverse?**

   a. $2x^2 - 34x - 104 = 0$ *c.* $3x^2 - 32x - 104 = 0$

   b. $2x^2 + 34x + 104 = 0$ *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo?**

   a. 12 y 5 cm *b.* 13 y 4 cm *c.* 14 y 3 cm *d.* Otras. Escríbelas. ________

Situación 3. Un constructor diseña un techo con doble caída de agua y necesita colocar un soporte como se indica en la figura 3.1.

1. **¿Cuál es la medida de *x*?**

   a. 2.4 m *b.* 1.8 m *c.* 3 m *d.* Otra. Escríbela. ________

2. **¿Cómo es el triángulo *ABC* respecto al *BDC*?**

   a. Congruente *c.* Parecido

   b. Semejante *d.* De otro tipo. Escríbelo. ________

3. **¿Qué criterio se emplea para resolver la situación anterior?**

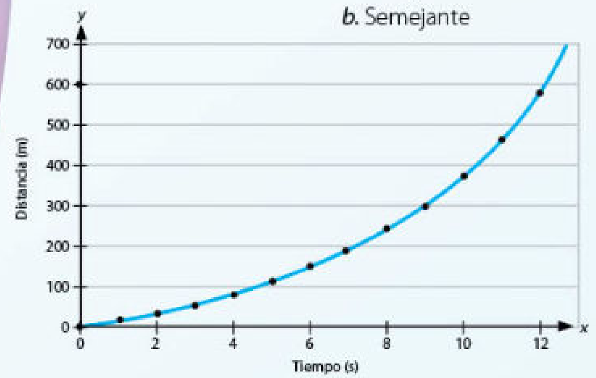
   a. LLL

   b. LAL

   c. AAA

   d. Otro. Escríbelo.

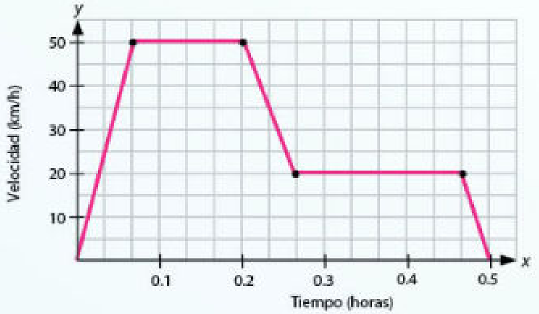
   ____



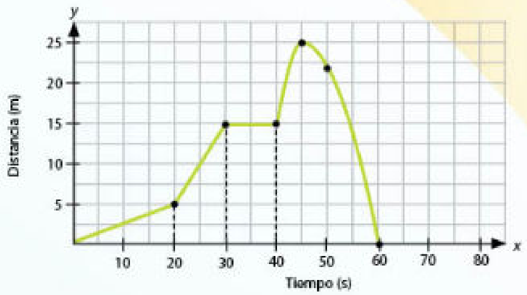
Gráfica 3.1

Situación 4. Observa las gráficas 3.1 a 3.3:

Evaluación por competencias



Gráfica 3.2



Gráfica 3.3

1. **De acuerdo con las gráficas, escribe F (falso) o V (verdadero) según corresponda:**

   a. La gráfica 3.1 corresponde a un objeto en caída libre. ________

   b. La gráfica 3.2 corresponde a un automóvil que parte del reposo y acelera, después permanece con esta velocidad durante cierto tiempo y desacelera hasta llegar a su destino. ________

   c. La gráfica 3.3 corresponde al llenado de un tinaco. ________

Situación 5. Analiza el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces y considera los siguientes eventos:

A: El primer lanzamiento es sol. *B*: El segundo lanzamiento es sol. *C*: Se obtienen dos soles seguidos.

1. **¿Cuáles son las probabilidades de los eventos *A*, *B* y *C*?**

   a. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{3}{8}$ *b.* $P(A) = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{1}{8}, P(C) = \frac{1}{2}$ *c.* $P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{3}{8}, P(C) = \frac{1}{4}$

   d. Ninguna de las anteriores.

2. **Escribe F (falso) o V (verdadero) según corresponda:**

   a. Los eventos *A* y *B* son independientes. ____

   b. Los eventos *B* y *C* son independientes. ____

   c. Los eventos *A* y *C* son independientes. ____

3. **La probabilidad de que ocurra *A* y *B* es**

   a. $\frac{1}{4}$ *b.* $\frac{1}{64}$ *c.* $\frac{9}{64}$ *d.* Ninguna de las anteriores

4. **La de *A* y *C***

   a. $\frac{3}{16}$ *b.* $\frac{1}{16}$ *c.* $\frac{3}{24}$ *d.* Ninguna de las anteriores

5. **La de *A* y *B***

   a. $\frac{3}{16}$ *b.* $\frac{1}{16}$ *c.* $\frac{3}{24}$ *d.* Ninguna de las anteriores

Bloque 4

Aprendizajes esperados

Al terminar el estudio del presente bloque serás capaz de:

- Utilizar en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resolver problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcular y explicar el significado del rango y la desviación media.

Desde nuestros orígenes como especie hemos desarrollado una curiosa habilidad para predecir el comportamiento de ciertos fenómenos con base en los patrones matemáticos que florecen mientras los exploramos. Entendido el proceso, a través de gran cantidad de datos tratamos de representar tal regularidad con expresiones abstractas y muchas de ellas muy interesantes.

La referida curiosidad por descubrir regularidades nos ha llevado a observar el cielo y las estrellas, aventurándonos en la idea de alcanzar alguna vez herramientas para medir, por ejemplo, la distancia que nos separa de un astro aunque jamás podamos llegar a él. La acumulación y el tratamiento de enormes cantidades de datos en la historia dieron origen a poderosos recursos matemáticos como la trigonometría y las medidas de dispersión.

Lección 21

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema: Patrones y ecuaciones.
Contenido: Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

El *n*-igma matemático

El razonamiento matemático supone la facultad que permite establecer conclusiones. Para ello se recurre a procesos mentales como el análisis, que facilita la creación de ideas: éstas son en ocasiones la solución del problema. Una de las herramientas más útiles para desarrollar tal examen corresponde a las **sucesiones**.
En la lección definirás el enésimo término de una expresión cuadrática.

Punto de partida

Para un jardín escultórico, el señor Iván pega tabiques en un orden específico, como se muestra en la figura 21.1:

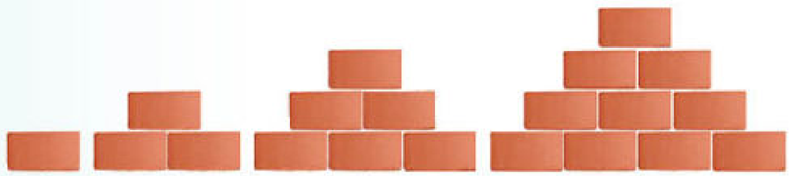


Figura 21.1

a) ¿Cuántos ladrillos deberá pegar en la posición 5? __________

b) ¿Y en la 25? __________

Reúnete con un compañero y contesten:

a) ¿Obtuvieron las mismas respuestas? ______ Explícale el procedimiento seguido para llegar a la respuesta __________

b) Escribe una forma que permita relacionar el número de posición con la cantidad de ladrillos. __________

Describan los pasos seguidos para llegar a una respuesta común: __________

Glosario

sucesión (del latín *successio*, *-ōnis*): conjunto ordenado de términos que cumplen una ley determinada.

Aprendemos

En grupo

El señor Iván les da una pista: para resolver problemas de secuencias, una estrategia es representar la información en una tabla y observar cómo se relacionan el número de la figura y el de tabiques o elementos que la componen.

1. Completen la tabla 21.1 para analizar la secuencia:

Posición	1	2	3	4	5	6
Desarrollo para obtener el número de ladrillos		1 + 2			1 + 2 + 3 + 4 + 5	
Cantidad de ladrillos	1		6			

Tabla 21.1

2. Observen la tabla 21.1 y respondan:

a) ¿Qué relación encuentran entre el desarrollo para obtener el número de ladrillos y el correspondiente a la posición? __________

b) ¿Qué procedimiento permite calcular la cantidad de ladrillos necesarios para construir la posición 25? __________

c) ¿Qué deberían hacer para encontrar la cantidad de ladrillos existente en la posición 100? Describan el procedimiento. __________

d) ¿Qué procedimiento permite calcular la cantidad de ladrillos necesarios para construir cualquier figura? __________

e) Con sus palabras, formulen una regla que permita determinar el número de tabiques de cualquier figura de la secuencia. __________

3. Ahora calculen lo siguiente:

a) La suma de los primeros 50 números naturales. __________

b) La suma de los primeros 80 números naturales. __________

c) La suma de los primeros 120 números naturales. __________

4. Con la guía del profesor expresen distintas maneras de encontrar la suma de los primeros números naturales.

Caja de herramientas

Si asignamos la letra n para representar cualquier número natural, la fórmula para encontrar la suma de los primeros números, $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$, es de acuerdo con el método de Gauss

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

¡Qué curioso!

Historias matemáticas

Se cuenta que en 1784, en la ciudad de Brunswick (en Baja Sajonia, Alemania), cierta profesora, de nombre Büttner, dictaba clase de matemáticas a un grupo de niños inquietos. Para mantenerlos ocupados un buen rato, les propuso el problema de sumar los primeros 100 números naturales; es decir: $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$.

La profesora se disponía a tomar un descanso mientras los chicos intentaban resolver tan ardua tarea; sin embargo, no se había terminado de acomodar en la silla cuando un niño, de sólo 10 años (o 7, según algunos historiadores), levantó la mano y dijo: ¡El resultado es 5 050!

Ese chico, Carl Friedrich Gauss, es hoy considerado *el príncipe de las matemáticas* por sus insuperables aportaciones a este campo de la ciencia.

Resolvió el problema con el análisis mostrado en la figura 21.2:

$$\begin{array}{r} 1+\ \ 2+\ \ 3+\ \ 4+\ \ 5\ldots+\ \ 98+\ \ 99+100 \\ +\ \ 100+\ 99+\ 98+\ 97+\ 98\ldots+\ \ 3+\ \ 2+\ \ 1 \\ \hline 101+101+101+101+\ 101\ldots+101+101+101 \end{array}$$

Figura 21.2

Descubrió que la suma del último número con el primero daba como resultado 101. Lo mismo sucedía con el penúltimo y el segundo, el antepenúltimo y el tercero…

Gauss decidió entonces averiguar cuántas veces se repetía el resultado de 101, y concluyó que 100; por ello calculó: $101 * 100 = 10\,100$. Pero, como la serie se duplicaba, dividió entre 2 y obtuvo 5 050: ¡la suma de los primeros 100 números naturales!

5. **Resuelvan en equipo el arreglo de estrellas amarillas mostrado en la figura 21.3:**

1 2 3 4

Figura 21.3

a) ¿Cuántas estrellas amarillas tendrá la posición 5? ____________________

b) ¿Cuántas tendrá la posición 10? ____________________

c) Escribe una expresión algebraica para cualquier figura. ____________________

6. **Compartan las respuestas con el resto del grupo y en plenaria expliquen el procedimiento.**

Acuérdate de...

El término general (n-ésimo término) de una sucesión es la expresión algebraica que permite calcular cualquier término.

¡Ya lo aprendimos!

El método de diferencias

Hay un método que sirve para encontrar la regla general de una sucesión. Por ejemplo, si queremos identificar una fórmula que devuelva los datos 2, 7, 14, 23, 34 se calculan las primeras y segundas diferencias, como muestra la tabla 21.2:

Sucesión	2	7	14	23	34
Primeras diferencias		$7-2=5$	$14-7=7$	$23-14=9$	$34-23=11$
Segundas diferencias			$7-5=2$	$9-7=2$	$11-9=2$

Tabla 21.2

Si la primera diferencia fuera constante, la regla podría expresarse con la forma $an + b$, donde n representa la posición de los números; pero en nuestro caso esto no ocurre hasta la segunda diferencia, lo cual indica que la expresión buscada es cuadrática y tendrá la forma $an^2 + bn + c$.

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y marquen la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

La tabla 21.3 muestra el método de diferencias cuando hablamos de una expresión cuadrática en una sucesión:

Posición	**1**	**2**	**3**	**4**	***n***	***n***
Términos de la sucesión	$a(1)^2 + b(1) + c =$ $a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c =$ $4a + 2b + c$	$a(3)^2 + b(3) + c =$ $9a + 3b + c$	$a(4)^2 + b(4) + c =$ $16a + 4b + c$	...	$an^2 + bn + c =$
Primeras diferencias		$(4a + 2b + c) - (a + b + c) =$ $3a + b$	$(9a + 3b + c) - (4a + 2b + c) =$ $5a + b$	$(16a + 4b + c) - (9a + 3b + c) =$ $7a + b$	...	
Segundas diferencias			$(5a + b) - (3a + b) =$ $2a$	$(7a + b) - (5a + b) =$ $2a$	...	

Tabla 21.3

Como dijimos, la expresión buscada es cuadrática. Por tanto, para la posición 1 se establece un sistema de ecuaciones de 3 variables; si fuera cúbica le correspondería uno de 4.

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a + b = 5 \\ 2a = 2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se tiene

$$a = 1;\ b = 2;\ c = -1$$

Por último, se escribe la ecuación para el enésimo término de una secuencia utilizando los coeficientes encontrados y obtenemos su expresión general:

$$1n^2 + 2n + (-1) = n^2 + 2n - 1$$

TIC y más

El enlace siguiente permite resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas; basta introducir los coeficientes para obtener las soluciones: http://www.vadenumeros.es/actividades/sistemas-regla-de-cramer.htm

(Consulta: 13 de enero de 2017)

¡Hazlo tú mismo!

1. Observa la secuencia de puntos mostrada en la figura 21.4:

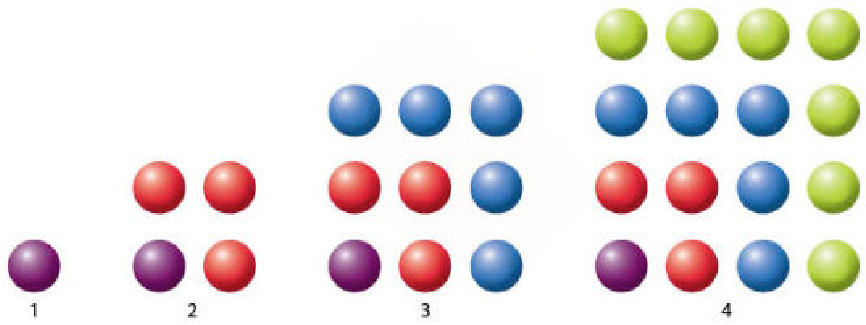


Figura 21.4

2. De acuerdo con esta secuencia, completa la tabla 21.4:

Número de puntos									
Posición	1	2	3	4	5	10	30	100	*n*

Tabla 21.4

3. Contesta estas preguntas:

a) Una de las posiciones de la misma secuencia consta de un total de 1 234 321 puntos. ¿Cuál de ellas es?

b) ¿Cuántos puntos tiene en el contorno la posición 100?

En contexto

Las matemáticas ayudan a la ciencia de la salud, como lo constata el doctor Thomas House, del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Warwick, quien indica que el punto de partida de una investigación fue un inusual modo de propagación del virus H1N1, lo que generó **un modelo y patrón matemático** para crear una potente herramienta que cuantificara la propagación y el contagio.

http://irescate.es/pandemias-universidad-de-warwick-desarrolla-modelo-matematico-para-luchar-contra-ellas/

(Consulta: 13 de enero de 2017)

¡Qué curioso!

La serie mágica

En 1766, el astrónomo alemán Johann Daniel Tietz, (Konitz, 1729-Wittenberg, 1796), formuló la llamada *ley de Titius-Bode*, en la que se constatan las distancias relativas medias al Sol de los principales planetas del sistema solar. Su expresión es D = 0,4 + 0,3.2 n, donde D es la distancia en unidades astronómicas y n es un exponente que adopta los valores 0, 1, 2,... Enunciada en 1766 por Titius y confirmada en 1772 por Bode, dicha ley no rige para los planetas Neptuno y Plutón.

Tomado de http://www.biografiasyvidas.com/biografia/t/titius.htm

(Consulta: 24 de enero de 2017)

4. Observa la secuencia de la figura 21.5 y completa la tabla de datos 21.5:

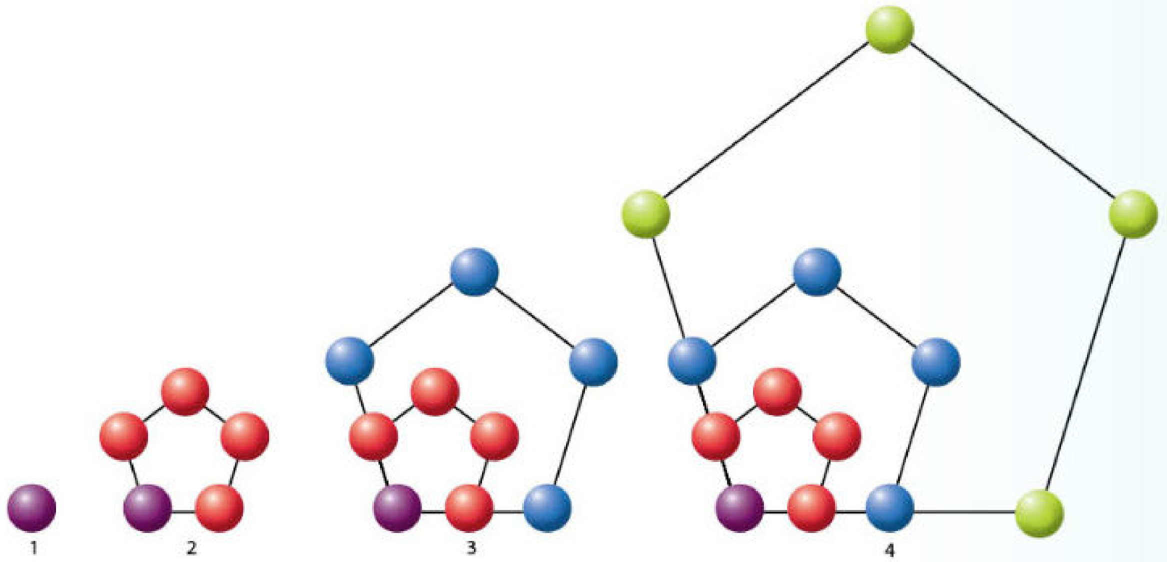


Figura 21.5

Número de puntos			45		57				
Posición	5	10		14		10	30	100	*n*

Tabla 21.5

5. Observa los números de la siguiente sucesión:

2, 8, 18, 32…

a) Si el sistema de ecuaciones que se obtiene al aplicar el método de diferencias en la sucesión es

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a + b = 6 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

¿Cuál expresión algebraica rige la sucesión?

Lección 22

Sólidos de revolución

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Figuras y cuerpos.
Contenido: Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

En muchas circunstancias de la vida cotidiana se observan aplicaciones de las matemáticas que proporcionan confort. Por ejemplo, el papel de éstas en el diseño de mercancías es importante para disminuir la cantidad de material requerido y, al mismo tiempo, maximizar el volumen de las generadas. ¿Identificas algunos productos en la figura 22.1? ¿Cómo se ha obtenido la forma en que los conoces?


Figura 22.1

Punto de partida

La extraña figura de Jeslin

A Jeslin le gusta experimentar con diseños generados con clips de colores, como el que se muestra en la figura 22.2.

Al transformar el clip en la figura *ABCDEF*, los puntos *A* y *F* quedan sobre la misma línea recta.

a) ¿Qué cuerpo geométrico obtendrá si rota el clip alrededor del eje *AF*?

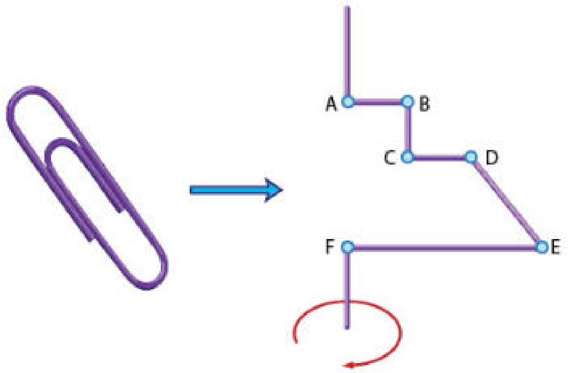


Figura 22.2

b) ¿Cuántas caras planas tiene? ______

c) ¿Cuántas caras curvas tiene? ______

En contexto

Una aplicación práctica de la idea de sólido de revolución, se encuentra en el diseño de vasijas de barro. La simetría de los objetos se logra a través de hacerlos girar sobre un eje imaginario que es determinado "a ojo" por el artesano.
En la actualidad los objetos de cerámica con este principio tienden a recuperar aspectos más artísticos. Un ejemplo de diseños interesantes podrás encontrarlo en el sitio:
http://www.guiadkn.com/index.php/006/04/complementos-de-ceramica-que-despiertan-tus-sentidos/
Reflexiona sobre la siguiente pregunta: ¿cómo la matemática puede ayudar al diseño de sólido de revolución que ambientan armónicamente una estancia?

Aprendemos

Los primeros clips de Jeslin

Jeslin, en algunos de los diseños que se muestran en la figura 22.3, ha notado que cuando hace girar un clip obtiene cuerpos geométricos.

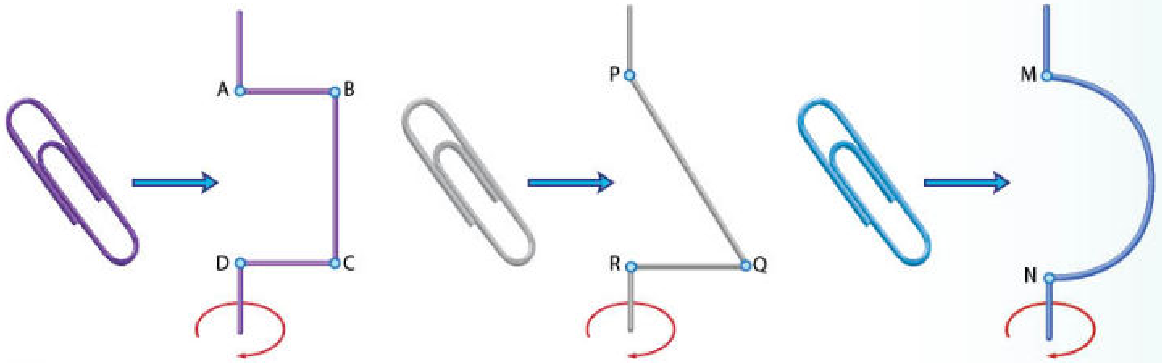


Figura 22.3

En equipo

Con tres clips de colores reproduzcan las tres figuras de Jeslin y después realicen las siguientes actividades:

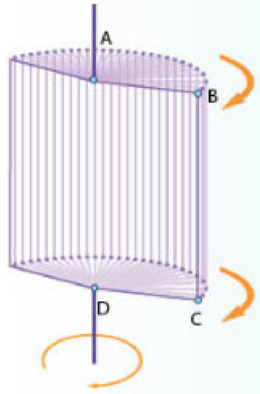


Figura 22.4

1. **Analicen lo que sucede con el clip morado (figura 22.4).**

a) ¿Qué figura geométrica obtiene Jeslin si rota el clip sobre el eje *AD*? ______
b) ¿Cuántas caras tiene este cuerpo geométrico? ______
c) ¿Cuántas caras planas tiene? ______
d) ¿Cuántas caras curvas? ______
e) ¿Qué segmento representa la altura de este cuerpo? ______
f) ¿Cuántos vértices tiene? ______
g) ¿Qué segmento determina el radio de una de sus caras? ______
h) ¿De qué tipo es la figura *ABCD*? ______

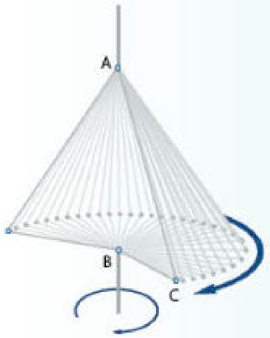


Figura 22.5

2. **Roten el clip gris usando como eje la recta que pasa por *A* y *B*, como se muestra en la figura 22.5.**

a) ¿Qué tipo de figura es *ABC*? ______ ¿Cuáles son sus propiedades? Describan.
______
b) ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al rotar el clip alrededor de *AB*? ______
c) ¿Cuántas caras planas tiene este cuerpo? ______ ¿Cuántas caras curvas? ______
d) ¿Qué segmento representa la altura de este cuerpo? ______
e) ¿Cuántos vértices se determinan? ______
f) ¿Qué segmento determina el radio de la base? ______
g) ¿Cuánto medirá el diámetro? ______

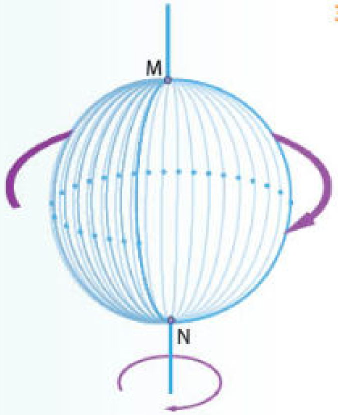


Figura 22.6

3. **Utilicen el clip azul para argumentar matemáticamente las respuestas a las preguntas acerca de la figura 22.6:**

a) ¿Qué tipo de figura es la curva que contiene a los puntos *M* y *N*? ______
¿Cuáles son sus propiedades? Describan. ______

b) ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al rotar alrededor de la recta que pasa por los puntos *M* y *N*? ______

c) ¿Cuántas caras planas tiene este cuerpo? ______ ¿Cuántas caras curvas? ______

d) ¿Cuántos vértices tiene? ______

e) ¿Qué segmento determina el radio de la base? ______

f) ¿Cuánto medirá el diámetro? ______

¡Ya lo aprendimos!

Un *sólido de revolución*, como el mostrado en la figura 22.7, es el cuerpo geométrico obtenido al hacer rotar cierta región del plano (línea o figura geométrica) alrededor de una recta, llamada *eje de rotación*.

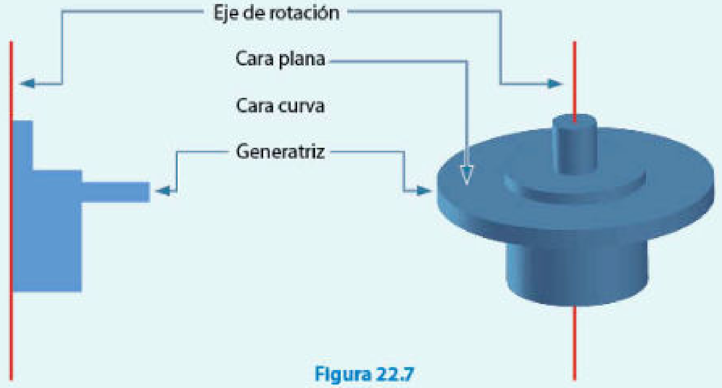


Figura 22.7

El sólido de revolución está determinado por la generatriz.

En contexto

Muchas de las actividades económicas requieren una educación financiera que permita sistematizar los procesos mercantiles involucrados. Por ejemplo, para la el diseño, elaboración y venta de artesanías en cerámica, como los que se muestran al inicio de esta lección, se requiere de la elaboración de un presupuesto, un plan de ahorro y, en muchos casos de un financiamiento que permita obtener un bienestar económico. Para saber un poco más sobre fideicomisos para el impulso de actividades económicas en México, consulta: http://www.fira.gob.mx/Nd/TEMA2.pdf (Consulta: 13 de enero de 2017)

En equipo

1. **Compartan con otros equipos las respuestas de las actividades 1, 2 y 3.**

a) ¿Los nombres de los sólidos de revolución fueron los mismos? ______

b) ¿Qué estrategias siguieron los equipos para determinar el número de caras planas y curvas, así como aristas de cada cuerpo? ______

c) ¿Qué relación hay entre la forma del sólido de revolución y su generatriz? ______

2. **Consideren cada uno de los objetos de la figura 22.8 como sólidos de revolución y determinen la directriz que los genera.**

Figura 22.8

TIC y más

La siguiente página permite manipular la directriz de un cono como sólido de revolución: http://www.geogebratube.org/student/m1989 (Consulta: 13 de enero de 2017)
Para explorar el cilindro entra en http://www.geogebratube.org/student/m1990 (Consulta: 13 de enero de 2017)
Crea tu propio sólido de revolución en http://www.geogebratube.org/student/m22573 (Consulta: 13 de enero de 2017)
Con esta última página intenten obtener los sólidos de revolución trabajados en la lección.

Los sólidos de revolución de Jeslin

3. **Jeslin ha utilizado un alambre de 14 cm para determinar un cono como sólido de revolución. También desea obtener su desarrollo plano (figura 22.9). Analicen los datos y los diseños. Después contesten.**

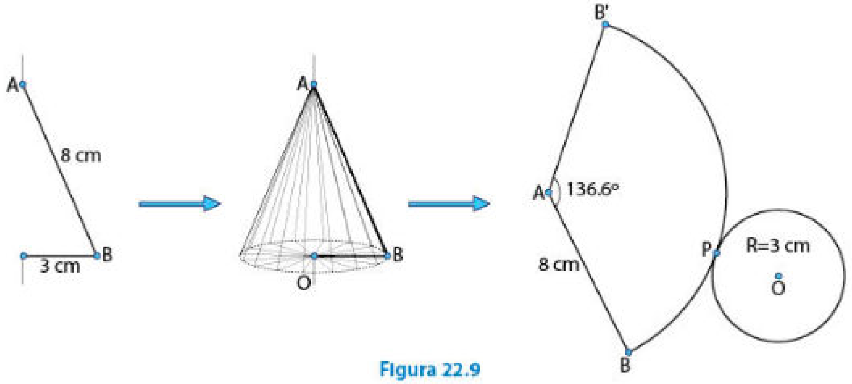


Figura 22.9

a) ¿Cuánto mide la altura del cono? ______

b) ¿Cuánto mide el diámetro de la base? ______

c) ¿Cuánto mide el arco *BB'*? ______

d) ¿Cuánto mide la circunferencia de la base? ______

e) Expliquen la relación entre el arco *AB'* y la circunferencia de la base. ______

f) ¿Cómo se ha determinado el ángulo de 136.6º? Escriban una justificación. ______

g) ¿Cambia la forma del cono si el punto *P* se coloca más cerca de *B*? Expliquen. ______

4. **Analicen el sólido de revolución y su propuesta de desarrollo plano mostrados en la figura 22.10:**

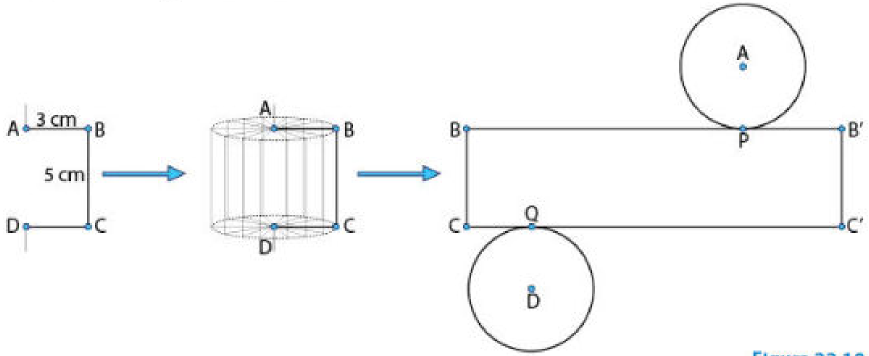


Figura 22.10

a) ¿Cuánto mide la altura del cilindro? ______

b) ¿Cuánto el diámetro de la base? ______

c) De acuerdo con el desarrollo plano que permite construir este cilindro, calculen

- La longitud *BB'*: ______
- La longitud *BC*: ______
- El radio *AP*: ______
- La longitud de cada una de las circunferencias: ______

5. **Usen una escuadra del juego de geometría y gírenla como en los casos mostrados en la figura 22.11. Analicen cada sólido de revolución obtenido.**

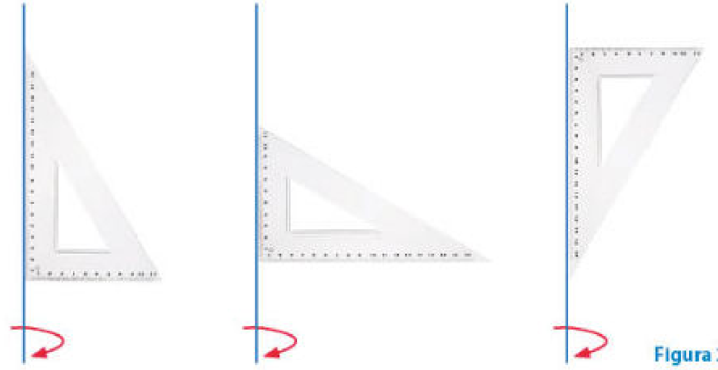


Figura 22.11

a) Obtengan el desarrollo plano del sólido de revolución generado al girar la escuadra alrededor del eje indicado. Dibújenlos en una cartulina.

b) Recorten el desarrollo plano y armen el cuerpo geométrico.

c) Muestren al resto del grupo el cuerpo geométrico y la escuadra que generó el sólido de revolución.

d) Comenten en los términos siguientes sobre las construcciones realizadas por los equipos:

- ¿Corresponde el cuerpo geométrico al sólido de revolución respectivo?
- ¿Las dimensiones del cuerpo son coherentes con las de la escuadra?

Y mientras tanto en...

En el bloque 3 de Ciencias de segundo grado diseñaste y elaboraste objetos técnicos que, como los mostrados en la figura [22.12], ayudaban a describir, explicar y predecir algunos fenómenos físicos relacionados con las interacciones de la materia. Esto permitió explorar el funcionamiento de máquinas de vapor y gatos hidráulicos, por ejemplo.

¿Qué objetos de los analizados pueden modelarse como sólidos de revolución?

¡Qué curioso!

Los sólidos de revolución tienen numerosas aplicaciones en la vida diaria; por ejemplo, en los pistones de los autos y en la funcionalidad de los embudos.

¿Qué otros sólidos de revolución reconoces en el entorno?

Figura 22.12

e) Sin realizar cálculos, determinen en cuál de los tres ocuparán más material. ______

Argumenten matemáticamente. ______

f) Sin realizar cálculos, determinen en cuál de los tres diseños se obtendrá el cuerpo con mayor volumen. ______ Argumenten matemáticamente. ______

6. **El recorrido de un disco compacto que se coloca en el respectivo contenedor (figura 22.13) describe un cuerpo geométrico.**

a) ¿De qué cuerpo se trata? ______

b) ¿Cuántas caras planas tiene? ______ ¿Cuántas caras curvas? ______

c) ¿A qué sólido de revolución equivale tal cuerpo geométrico? ______

d) ¿Qué figura geométrica cerrada hecha rotar por un eje permitiría obtener el mismo cuerpo geométrico? ______ Argumenten matemáticamente la respuesta. ______

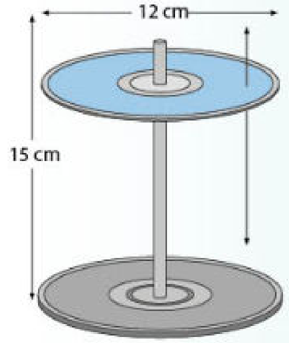


Figura 22.13

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Hazlo tú mismo!

En equipo

Reorganicen los equipos de trabajo. En este momento conviene compartir experiencias con otros compañeros del grupo.

La extraña figura de Jeslin

1 **Observen de nuevo el extraño diseño que Jeslin modeló con el clip, mostrado en la figura 22.14:**

a) ¿Cuál es la directriz? ______

b) De los sólidos de revolución explorados en esta lección, ¿cuál reconocen en el diseño de Jeslin? ______

c) ¿Cuántas caras planas hay? ______

d) ¿Cuántas caras curvas? ______

e) Describan un procedimiento, con argumentos matemáticos, para diseñar el desarrollo plano de tan extraño cuerpo geométrico.

______

______

Figura 22.14

Lección 23

La pendiente de una recta

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.
Contenido: Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Muchos fenómenos de la vida cotidiana se modelan gráficamente a través de una línea recta; por ejemplo: la inclinación de una autopista, el cambio de altura en un paso elevado, la tarifa de cierto servicio o el tipo de cambio entre dos monedas (figura 23.1).

Figura 23.1

Esas gráficas se analizan matemáticamente a través de la información que nos da la inclinación de dicha recta y su relación con los ejes coordenados. De esa manera, muchos fenómenos son predecibles gracias a las matemáticas.

En contexto

Las rampas son muy importantes para que las personas con discapacidad tengan una movilidad adecuada al transitar por las calles de nuestras ciudades. Pero su construcción no es sencilla pues, por lo menos, se tienen que tomar en cuenta el gradiente, la longitud y la anchura de la rampa. En algunos casos también se consideran los pasamanos, descansos y finales de recorrido. El gradiente de la rampa se refiere a la inclinación que debe tener ésta para favorecer el ascenso o descenso de las personas.
¿Cómo usarías la idea de pendiente de una recta para diseñar una rampa?

Punto de partida

Una de las obras más importantes en la ciudad de México es la construcción de la Línea 12 del Sistema de Transporte Colectivo (Metro).

Uno de los problemas para los ingenieros es la elevación de las vías sin que el tren dé saltos durante el trayecto (figura 23.2)

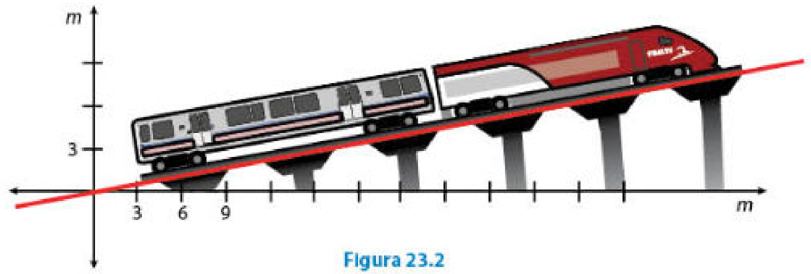


Figura 23.2

De acuerdo con la figura 23.2, ¿cuál ecuación de la recta representa el ascenso del tren sobre las vías? ______

a) ¿Cuántos metros se ha elevado el tren cuando ha recorrido 18 m a nivel del suelo? ______ ¿Y a los 36 m a nivel del suelo? ______

b) De mantener ese ritmo de ascenso, ¿cuántos metros se eleva por cada metro recorrido a nivel de suelo? ______

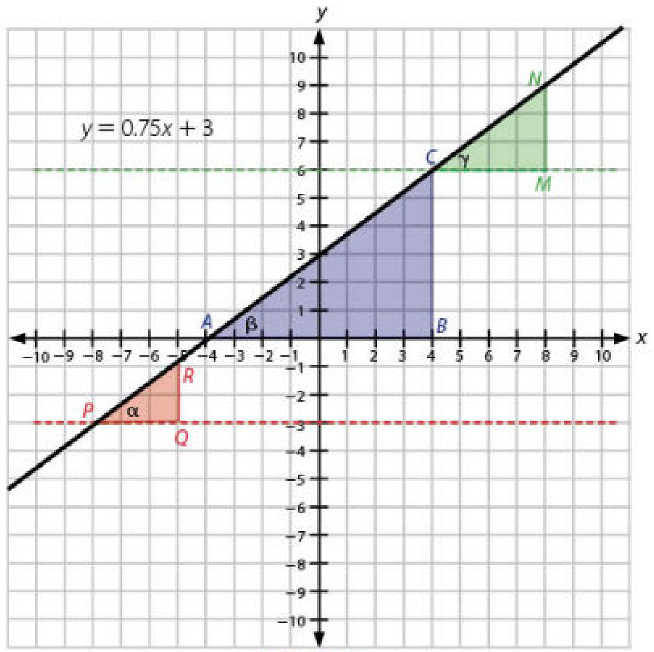
c) ¿Cabe predecir esta relación a partir de la ecuación de la recta? ______

d) ¿Cómo predecir el comportamiento si se conoce sólo el ángulo de elevación? ______

Aprendemos

En equipo

1. Analicen la gráfica 23.1, correspondiente a la recta $y = 0.75x + 3$, y los triángulos resaltados en rojo, azul y verde. Después contesten las preguntas.



Gráfica 23.1

a) ¿Qué tipo de triángulos son *PQR*, *ABC* y *CMN*? ______

b) Usen un transportador y midan los siguientes ángulos:

- α: ______
- β: ______
- γ: ______

c) Justifiquen matemáticamente las medidas obtenidas. ______

d) Calculen la longitud de cada segmento para obtener los cocientes indicados:

- $\frac{\overline{RQ}}{\overline{PQ}}$: ______
- $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$: ______
- $\frac{\overline{NM}}{\overline{CM}}$: ______

e) Argumenten matemáticamente el resultado anterior. ______

f) ¿Qué relación hay entre los cocientes obtenidos en el inciso *d)* y la pendiente de la recta $y = 0.75x + 3$? ______

g) Dibujen otro triángulo rectángulo considerando la recta y el eje de las abscisas o una paralela como los tres ejemplos trabajados. Calculen el cociente de sus lados en el mismo sentido que los ejemplos. ¿Qué valor se obtiene? ______ Expliquen con argumentos matemáticos la respuesta. ______

h) ¿Se obtendrá el mismo resultado con cualquier triángulo dibujado con estas condiciones? ______ ¿Por qué? ______

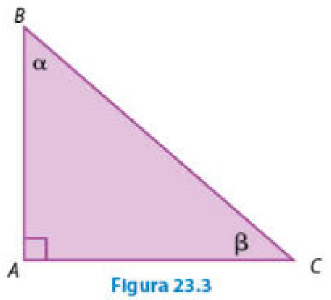


Figura 23.3

Glosario

En el triángulo es rectángulo, el lado mayor se denomina *hipotenusa*; y los otros dos, *catetos*. Si se toma como referencia uno de sus ángulos agudos, se habla de *catetos opuesto y adyacente*.
Por ejemplo, en el triángulo *ABC*, para el ángulo α, el lado *AC* es el cateto opuesto; y *BA* el adyacente. Mientras, para el ángulo β, el opuesto es *BA* y el adyacente *AC*.

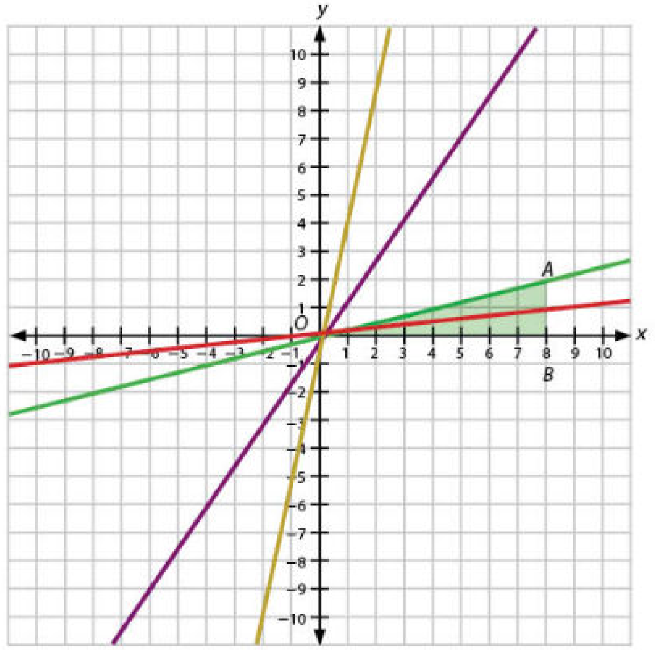
2. Analicen las cinco rectas de la gráfica 23.2. Dibujen en el cuaderno cada una por separado.

a) Si se toma como referencia el ángulo *O* del triángulo *AOB*, ¿cuánto mide el cateto opuesto (*CO*)? ______ ¿Y el adyacente (*CA*)? ______

b) Calculen el cociente $\frac{CO}{CA}$ = ______

c) ¿Cuál es la ecuación de la recta *OA*? ______

d) Usen el transportador para calcular la magnitud del ángulo *O*. ______



Gráfica 23.2

3. Tracen un triángulo rectángulo para cada una de las cuatro rectas. Cada triángulo debe tener por vértice al punto *O*; y uno de sus catetos, estar contenido en el eje de las abscisas. Analicen sus propiedades y después completen la tabla 23.1.

Color de la gráfica	Ecuación	Pendiente	Valor del ángulo *O*	Medida del cateto opuesto (*CO*)	Medida del cateto adyacente (*CA*)	Razón $\frac{CO}{CA}$	Cociente (decimal)
(rojo)							
(verde)							
(morado)							
(ocre)							

Tabla 23.1

a) ¿Qué relación hay entre la pendiente de una recta y la razón $\frac{CO}{CA}$?

b) Compartan los valores de su tabla con la de otro equipo. ¿Cómo son los resultados obtenidos en la columna "Pendiente" respecto a los del otro? ______
¿Por qué? ______

c) ¿Cómo son entre sí los resultados de ambos equipos en la columna "Razón"? ______ ¿Y en la de "Cociente"? ______

d) Comparen en grupo los resultados. ¿Cómo son entre sí todos los de la columna "Cociente"? Expliquen matemáticamente. ______

En grupo

1. Discutan grupalmente las siguientes preguntas y, con la guía del profesor, contesten de manera consensuada:

a) ¿Qué sucede con la pendiente (su valor decimal) cuando el ángulo de la recta es de 45º? Argumenten matemáticamente la respuesta. ______

b) ¿Qué sucede con la pendiente (su valor decimal) cuando el ángulo de la recta es mayor que 0º pero menor que 45º? Argumenten matemáticamente la respuesta. ______

c) ¿Qué sucede con la pendiente (su valor decimal) cuando el ángulo de la recta es mayor que 45º, pero menor que 90º? Argumenten matemáticamente la respuesta. ______

¡Qué curioso!

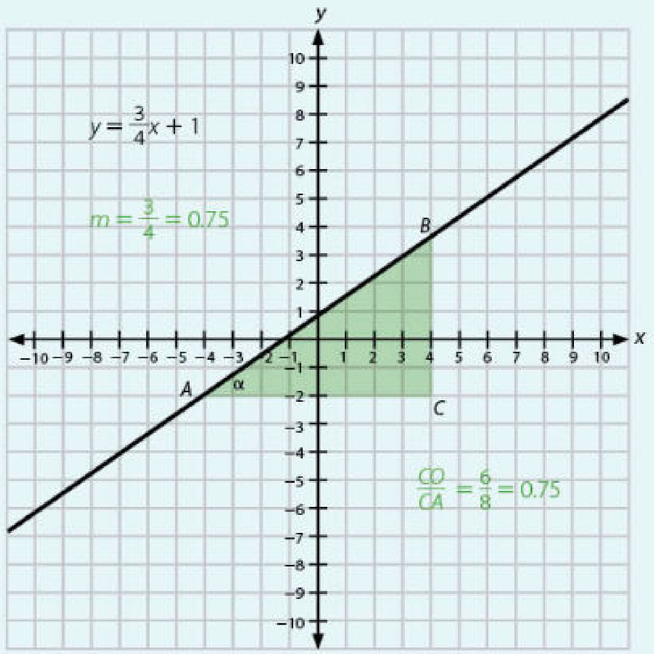
La noción de **línea recta** nos acompaña desde tiempos remotos; Euclides la definió en *Los elementos*, cerca del año 300 antes de nuestra era. Sin embargo, jamás imaginó que uno de los grandes problemas que apasionaría a los grandes matemáticos de todas las épocas sería… el cálculo de su pendiente.

Personajes de la talla de Arquímedes, Leibniz, Newton, Fourier, LaGrange y Descartes se ocuparon de este problema; logrando avances importantes para la matemática en general.

¡Ya lo aprendimos!

La pendiente de una recta es un parámetro que nos indica el grado de inclinación respectivo. El valor se obtiene directamente de la ecuación $y = mx + b$ (donde m es la pendiente); o bien, a través del cociente $\frac{CO}{CA}$, determinado por un triángulo rectángulo, como se muestra en la gráfica 23.3.

Si la pendiente es 1, el ángulo α mide 45°. Conocer uno u otro, nos permite identificar al otro.
De la misma manera, si se sabe que la pendiente de la gráfica 23.3 es $\frac{3}{4}$ entonces podremos saber la magnitud del ángulo alfa.



Gráfica 23.3

TIC y más

Entra en la página http://www.geogebratube.org/student/m12318 (Consulta: 2 de julio de 2013.)

Manipula los puntos P y Q y observa los efectos al desplazarlos por el plano cartesiano.

a) ¿Qué relación encuentras con los contenidos abordados en esta lección?

b) ¿Cómo obtener un ángulo de 45° formado entre la recta y el eje de las abscisas?

c) ¿Por qué punto sobre el eje de las ordenadas pasa una recta de la forma $y = mx$?

d) ¿Y una de la forma $y = mx + b$, con b diferente de 0?

¡Hazlo tú mismo!

En equipo

1. **Dibujen dos gráficas distintas que tengan la misma pendiente. ¿Qué propiedades comparten? ¿En qué son distintos?**

2. **Encuentren la ecuación de una recta que forma un ángulo de 60° con el eje de las abscisas. Planteen un problema que pueda modelarse con dicha recta.**

   a) ¿Dónde se cruza la recta con el eje de las abscisas? __________

   b) De acuerdo con el problema planteado, ¿qué significado adquiere modificar la pendiente? __________

   c) ¿Qué significa en su problema tener una pendiente 0? Expliquen con argumentos matemáticos. __________

3. **Una compañía telefónica cobra \$20.00 de tarifa mensual y \$2.00 por llamada realizada.**

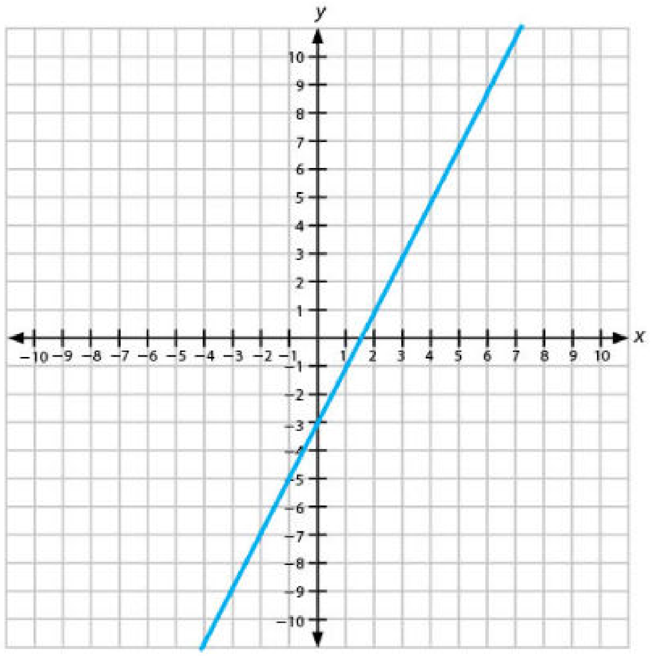
   a) ¿Cuánto cobrará por 30 llamadas en un mes? __________
   ¿Y por 100 telefonemas? __________

   b) ¿Qué ecuación modela esta situación? __________

   c) ¿Cómo se modificaría la gráfica si aumentara la tarifa mensual pero no el precio por llamada? Argumenten matemáticamente. __________

   d) ¿Cómo se modificaría la gráfica si aumentara el costo por llamada pero no la renta mensual? Argumenten matemáticamente la respuesta.

4. **De acuerdo con la gráfica 23.4, planteen un problema que pueda modelarse con esta recta.**



Gráfica 23.4

   a) De acuerdo con el problema planteado, expliquen el significado del ángulo que la recta forma con el eje de las abscisas. __________

   b) ¿Qué significa en el problema que el ángulo cambie? __________

   c) ¿Qué significado tiene en el problema hacer variar la pendiente?

Acuérdate de...

En el bloque 5 de segundo grado exploraste los efectos sobre la gráfica al modificar los parámetros m y b de la ecuación $y = mx + b$.
Revisa tus notas de clase y establece los vínculos con lo estudiado en esta lección.

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.
Contenido: Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Los triángulos rectángulos

Un aspecto que ha influido en el desarrollo de la humanidad es la agrimensura como herramienta al planificar la siembra y la cosecha de los alimentos necesarios para los grandes grupos sociales. Otro aspecto importante es el desarrollo de la astronomía y sus implicaciones en la navegación. De esa manera surgió la necesidad de calcular distancias cuya medición directa no resultaba posible.

Desde los babilonios hemos enfrentado con ingenio el problema, a través de una serie de procedimientos que permiten relacionar las medidas de los lados de un triángulo con las correspondientes a los ángulos. Hoy, las calculadoras y otros dispositivos como los teodolitos permiten realizar de inmediato esos cálculos.

Punto de partida

Ingrid (*I*) y Edith (*E*) se encuentran en los extremos del cable de una tirolesa (figura 24.1). La única información recibida antes de lanzarse era que éste y la horizontal (línea roja) formaban un ángulo de 6° y que la diferencia de altura de los trípodes que sostienen el cable era de sólo 4 m.

a) ¿Qué ángulo forman los segmentos blanco y rojo? ________
¿Por qué? ________

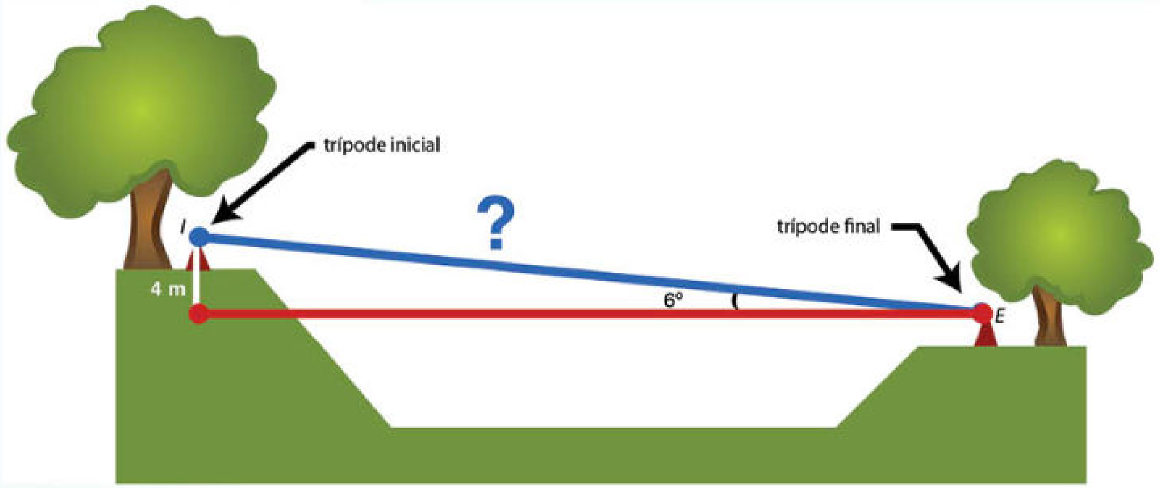


Figura 24.1

b) Si la longitud del segmento rojo es de 40 m, ¿cuánto mediría el azul? ________
¿Qué herramienta o procedimiento matemático utilizaste para calcular?

c) ¿Cuánto mide el ángulo con vértice *I*? ________

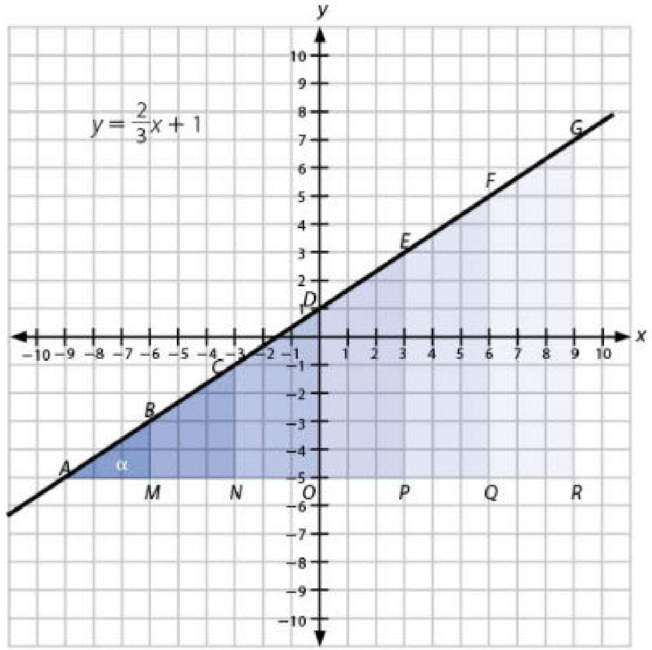
d) ¿Cómo se calcularía la distancia que Ingrid recorrerá sobre el cable de la tirolesa para llegar hasta Edith?

Aprendemos

En equipo

Reúnanse en equipos de trabajo para realizar las siguientes actividades:

1. Analicen la gráfica 24.1. Después contesten.



Gráfica 24.1

a) ¿Cómo son entre sí los triángulos *ABM, ACN, ADO, AEP, AFQ* y *AGR*? ________
¿Por qué? ________

b) ¿El ángulo α es común a todos los triángulos? ________

c) ¿Cuánto mide el cateto opuesto al ángulo α en el triángulo *AGR*? ________
¿Y el cateto adyacente? ________

d) ¿Cuánto mide la hipotenusa? ________

e) ¿Cómo obtuvieron el valor de la hipotenusa? Expliquen matemáticamente.

f) ¿Cuánto vale el cociente $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$? ________

g) ¿Cuánto vale el cociente $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$? ________

En contexto

En años recientes, los países se han preocupado más por el desarrollo sustentable: alrededor del mundo se han revitalizado los movimientos centrados en el cuidado ecológico; sin embargo, la preservación del ambiente exige que se conozcan, de manera precisa, tanto la posición de los puntos como la extensión y los límites de los elementos sobre la superficie de la tierra; es decir, de la agrimensura. ¿Cómo crees que influye la matemática en el desarrollo de la agrimensura? Para saber más de este tema, puedes visitar el sitio: https://www.ecured.cu/Agrimensura (Consulta: 24 de enero de 2017)

2. **Con los datos de la gráfica 24.1 y tomando como referencia el ángulo α, completen la tabla 24.1:**

Triángulo	*ABM*	*ACN*	*ADO*	*AEP*	*AFQ*	*AGR*
Medida del cateto opuesto						
Medida del cateto adyacente						
Medida de la hipotenusa						
Cociente $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$						
Cociente $\frac{\text{Cateto adyacenre}}{\text{Hipotenusa}}$						

Tabla 24.1

a) ¿Qué relación hay entre el cociente $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ en todos los triángulos? ______

b) ¿Qué relación hay entre el cociente $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$ en todos los triángulos? ______

¡Qué curioso!

El *Canardam 2* es un brazo robótico gigante que la Estación Espacial Internacional usa para desplazar a los astronautas fuera de la estación (figura 24.3)

Para lograrlo con precisión se aplican varias veces las razones trigonométricas sobre los ángulos determinados en cada movimiento.

Figura 24.3

¡Ya lo aprendimos!

En un triángulo rectángulo cabe establecer relaciones entre los elementos. Por ejemplo, en el de la figura 24.2, el *ABC*, respecto al ángulo α, el lado *CB* es el cateto opuesto y el *AC* el adyacente.

Se definen como *razones trigonométricas* básicas las siguientes:

$$\text{Seno } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Coseno } \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Tangente } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

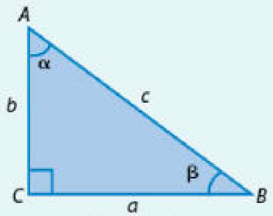


Figura 24.2

Otra manera de establecer estas razones radica en el uso de abreviaturas y de letras del alfabeto griego para los ángulos:

$\text{Seno } \alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\text{Coseno } \alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\text{Tangente } \alpha = \frac{a}{b}$

3. **Analicen de nuevo la gráfica de la actividad 1. Completen la tabla 24.2 tomando como referencia el ángulo resaltado con rojo en cada triángulo:**

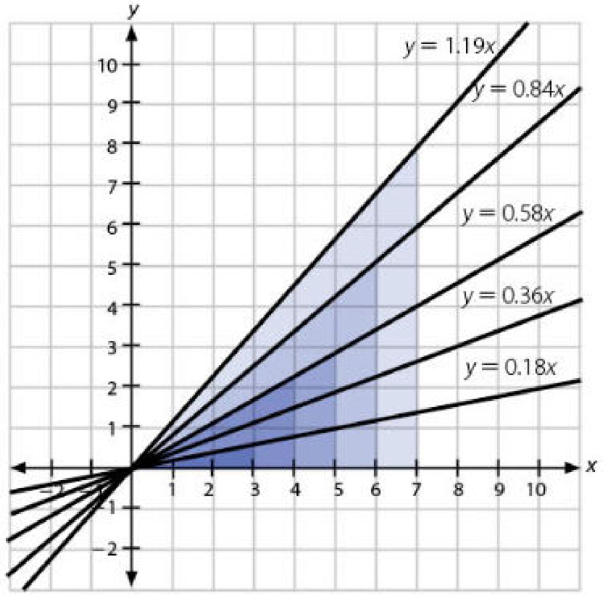
Triángulo	*ABM*	*ACN*	*ADO*	*AEP*	*AFQ*	*AGR*
Medida del cateto opuesto						
Medida del cateto adyacente						
Medida de la hipotenusa						
Razón seno						
Razón coseno						
Razón tangente						

Tabla 24.2

a) ¿Cómo son entre sí los resultados de la razón seno para todos los triángulos? ______ Argumenten matemáticamente el resultado. ______

b) ¿Cómo son entre sí los resultados de la razón coseno para todos los triángulos? ______ Argumenten matemáticamente el resultado. ______

4. **Analicen las rectas de la gráfica 24.2. Usen un transportador para medir los ángulos que cada recta forma con el eje de las abscisas. Después contesten.**



Gráfica 24.2

a) De acuerdo con la gráfica, ¿cuánto vale *Tan* 10°? ______________________

¿Por qué? ______________________

____

b) Observen que uno de los catetos del triángulo determinado por la recta $y = 0.18x$ y el eje de las abscisas mide 3. ¿Cuánto mide el otro cateto? ______________

¿Por qué? ______________________

c) ¿Qué ecuación me permite calcular con exactitud el valor del otro cateto?

____

d) ¿Cuánto vale la hipotenusa de ese triángulo? ______________________

e) ¿Cuánto vale *Sen* 10°? ______________________

¿Por qué? ______________________

____

f) Con base en la información de las gráficas, completen la tabla 24.3:

Ecuación de la gráfica	Ángulo que determina con el eje de las abscisas (α)	Tan α	Sen α	Cos α
$y = 0.18x$				
$y = 0.36x$				
$y = 0.58x$				
$y = 0.84x$				
$y = 1.19x$				

Tabla 24.3

g) ¿Cuánto mide el ángulo cuya tangente es 0.84? ______________________

Argumenten matemáticamente la respuesta. ______________________

h) ¿Cuánto mide el ángulo α si se sabe que *Sen* α = ? ______________________

i) Una recta forma un ángulo β con el eje de las abscisas, de manera que *Tan* $\beta = \frac{11}{4}$. ¿Cuánto mide el ángulo β? ______________ ¿Por qué? ______________

____

j) ¿Cuál es la ecuación de una recta que forma un ángulo de 70° con el eje de las abscisas? ______________________ Argumenten matemáticamente.

____

k) ¿Entre qué ángulo de la tabla se encuentra otro cuya tangente es 0.40? ______________

Argumenten matemáticamente la respuesta. ______________________

TIC y más

En ciertos sitios de la red puedes obtener los valores de las razones trigonométricas para cualquier ángulo. Por ejemplo:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculadora-cientifica.html
(Consulta: 24 de enero de 2017)
Verifica con ayuda de esta calculadora los valores encontrados en la actividad 2.
Escribe en la sección "Enter value" el ángulo que desees obtener, y observa el resultado en "Degrees".

¡Ya lo aprendimos!

Una manera de organizar los resultados para usarlos posteriormente sin recurrir a los cálculos una y otra vez radica en sistematizarlos en una tabla, como la 24.4:

Tabla trigonométrica							
Ángulo	**Seno**	**Coseno**	**Tangente**	**Ángulo**	**Seno**	**Coseno**	**Tangente**
0°	0	1	0				
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.036
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.072
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.111
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.150
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.192
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.235
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.280
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.327
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.376
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.428
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.483
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.540
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.600
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.664
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.732
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.804
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.881
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.963
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.050
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.145
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.246
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.356
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9271	0.3746	2.475
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.605
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.746
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.904
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.078
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.271
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.487
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.732
31°	0.5150	0.8572	0.6008	76°	0.9703	0.2419	4.011
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.332
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.705
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.145
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.671
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.314
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.115
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.514
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.430
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.301
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.081
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.636
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.290
45°	0.7071	0.7071	1	90°	1	0	∞

Tabla 24.4

5. **Rocío observa el autobús escolar que se acerca a su novio, quien la espera a 8 m de distancia. En ese momento, el ángulo formado por ella, el vehículo y el joven es de 60°, como se muestra en la figura 24.4:**

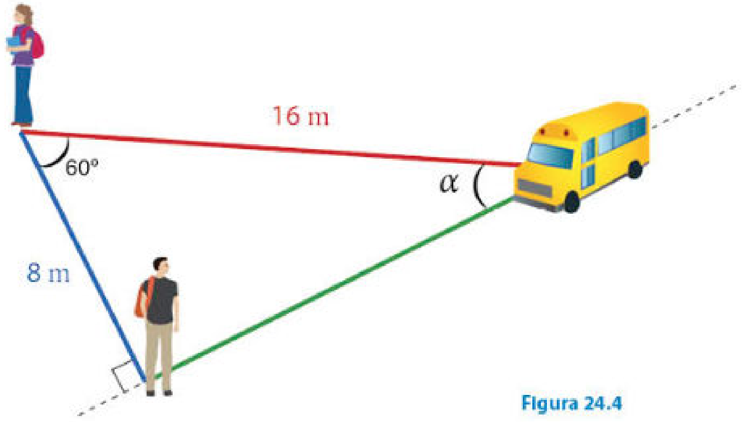


Figura 24.4

a) ¿Con qué ángulo observa el chofer la distancia entre la chica y el novio?

b) ¿Qué relación hay entre este ángulo y aquel con que Rocío observa la distancia entre el autobús y el joven?

c) ¿Qué distancia hay entre el novio y el vehículo?

d) ¿Se calcularía esa distancia sin usar el teorema de Pitágoras?

Expliquen por qué.

e) Obtengan los siguientes datos:

- *Sen* 60° = — *Sen* α =
- *Cos* 60° = — *Cos* α =
- *Tan* 60° = — *Tan* α =

f) ¿Qué relación hay entre *Sen* 60° y *Cos* α?

g) ¿Cuál entre *Cos* 60° y *Sen* α?

Y mientras tanto en...

En el bloque 1 de primer grado de Geografía de México y del mundo reconociste la utilidad de las imágenes de satélite, el sistema de posicionamiento global (GPS) y los sistemas de información geográfica (SIG). Investiga cómo se utiliza la trigonometría en esos sistemas de localización vía satélite.

6. **Analicen el triángulo de la figura 24.5.**

a) Obtengan las siguientes razones:

- *Sen* α = — *Sen* β =
- *Cos* α = — *Cos* β =
- *Tan* α = — *Tan* β =

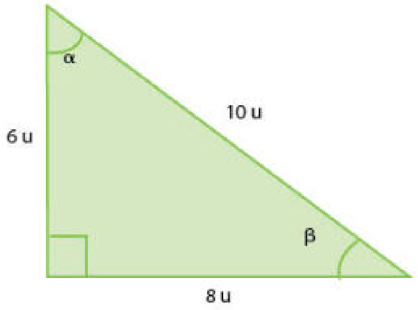


Figura 24.5

a) Cuánto es α + β?

b) ¿Qué relación hay entre *Sen* α y *Cos* β?

c) ¿Cuál entre *Cos* α y *Sen* β?

d) Escriban una oración en la que describan esta propiedad matemática.

7. **Usen la tabla trigonométrica de la sección ¡Ya lo aprendimos! para realizar las siguientes actividades:**

a) Elijan al azar un ángulo; por ejemplo, 32°. Resalten el valor mostrado en la columna "Seno" para este ángulo; es decir, el número 0.529929. Con el mismo color distingan el valor del "Coseno" del ángulo complementario, en este caso *Coseno de 58°*.

b) Elijan un color diferente y repitan la actividad a) para otros cuatro ángulos distintos. ¿Qué observan en los valores del mismo tono?

Argumenten matemáticamente tal comportamiento.

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Hazlo tú mismo!

Individual

1. **Observa con atención la figura 24.1.**

a) Dibuja un triángulo rectángulo que modele el problema de la tirolesa.

b) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la longitud de la tirolesa, el ángulo de elevación y la diferencia de las alturas de los trípodes?

c) ¿Qué distancia recorrerá Ingrid sobre la tirolesa hasta llegar a Edith? Argumenten matemáticamente el procedimiento para obtener esta respuesta.

2. **Suponiendo que α y β son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, ¿cuánto vale (*Tan* α) (*Tan* β)? ______ Justifica matemáticamente la respuesta.**

3. **Una recta tiene por ecuación $y = 0.42x$. ¿Qué ángulo forma con el eje de las abscisas?**

4. **En un triángulo rectángulo se cumple que los catetos son iguales y el coseno de uno de sus ángulos es 0.7071. ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?**

Lección 25

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.
Contenido: Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Trigonometría

La palabra *trigonometría*, cuyo origen se remonta a la antigua Grecia, se compone de *trígono* y *metrón*: "triángulo" y "medida", respectivamente. Esta rama de la matemática estudia las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo. Sus aplicaciones son ilimitadas: desde el cálculo de la altura que alcanza una escalera sobre una pared hasta los más precisos métodos para navegar a través sistemas de satélites.

La trigonometría se ha usado desde la construcción de las pirámides egipcias hasta el cálculo de la distancia que nos separa de las estrellas. (Figura 25.1)

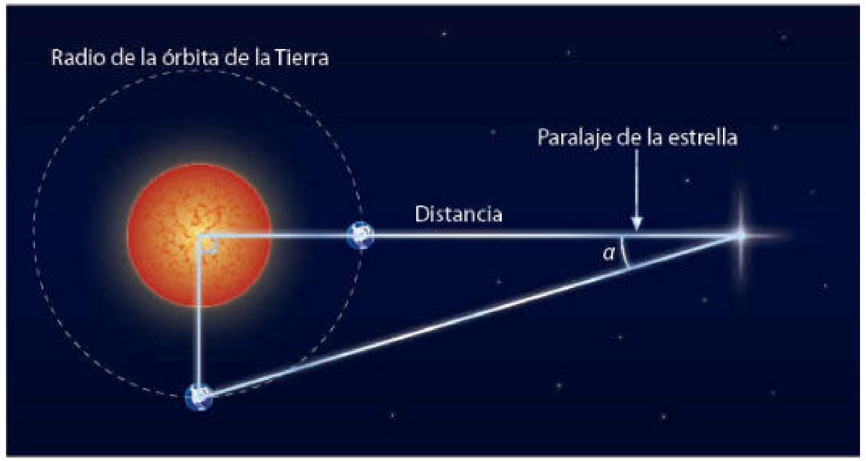


Figura 25.1

En contexto

Uno de los problemas más recurrentes en la historia del hombre es la de medir distancias inaccesibles. Las primeras soluciones se remontan hasta nuestros ancestros quienes desde entonces han diseñado diversos instrumentos de medición cuyo principio descansa en la trigonometría. Para que realices un recorrido sobre algunos casos interesantes de cálculo de distancias inaccesibles, entra al sitio: http://jnsilva.ludicum.org/HMR13_14/Perelman_Geometry.pdf ¿Qué podrías medir de tu entorno inmediato usando trigonometría?

Punto de partida

Se tiene una hoja tamaño carta (21.59 cm de ancho y 27.9 cm de largo).

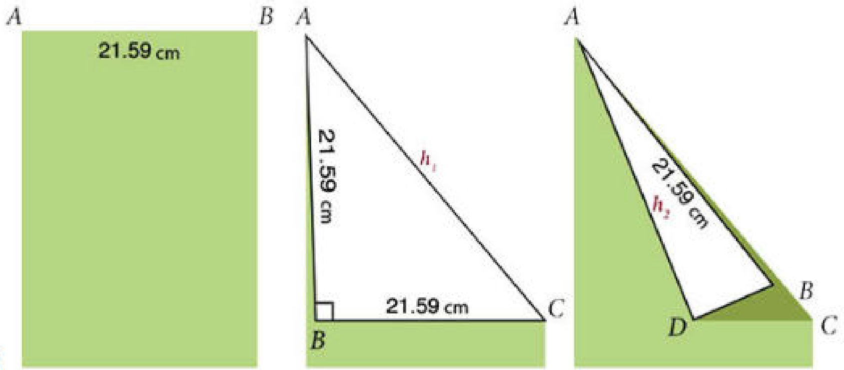


Figura 25.2

Como se muestra en la figura 25.2, se hace el primer doblez para obtener un triángulo rectángulo que, además, es isósceles.

a) ¿Cuánto miden los catetos del triángulo *ABC*? ______ y ______

b) ¿Cuánto la hipotenusa? ______

Para obtener el triángulo *ABD* se hizo un doblez por la bisectriz del ángulo *BAC*. Observa que uno de sus lados sigue midiendo 21.59 cm.

a) ¿Por qué el *DAB* es un triángulo rectángulo? Argumenta matemáticamente la respuesta. ______

b) ¿Cuánto mide el ángulo *DAB*? ______

¿Por qué? ______

c) ¿Cuánto mide la hipotenusa h_2? ______

TIC y más

Descarguen el archivo de http://www.geogebratube.org/student/m37254 Será necesario tener instalado el software Geogebra, que se obtiene de manera gratuita en http://www.geogebra.org/cms/es/ Se usará el archivo para explorar la variación de las razones trigonométricas a partir de las actividades propuestas.
(Consulta: 13 de enero de 2017)

Aprendemos

En equipo

Reúnanse en equipos para realizar las siguientes actividades:

1. **Analicen la figura 25.3. De ser posible, utilicen el archivo de geometría dinámica para realizar una exploración interactiva.**

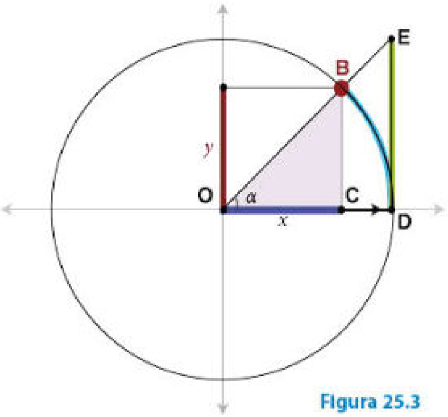


Figura 25.3

a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto *B*? ______

b) Encuentren los siguientes valores:

- *Sen* α = ______
- *Cos* α = ______
- *Tan* α = ______

c) ¿Cómo son entre sí los triángulos *OBC* y *OED*? ______

Justifiquen matemáticamente la respuesta. ______

d) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{ED}$ en términos de *x* y *y*? ______

e) Si *x* = 1, ¿cuánto mide el segmento $\overline{ED}$? ______

¿Por qué? ______

f) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{ED}$ en términos de *x* y *y*? ______

g) ¿Cómo son entre sí la longitud del segmento $\overline{ED}$ y el valor de *Tan* α? ______

h) Si se cambia la posición del punto B sin que éste deje de estar sobre la circunferencia, ¿Cambiarían los resultados de los incisos anteriores? ______

¿Por qué? ______

¡Ya lo aprendimos!

La longitud del arco $\widehat{BD}$ está relacionada con la magnitud del ángulo α, a su vez está vinculada con la longitud del segmento $\overline{ED}$. Pero la longitud de este segmento es igual a la tangente del ángulo α: $\widehat{BD}$ es el arco que subtiende al ángulo cuya tangente es $\frac{y}{x}$ igual a $\overline{ED}$.

Esta propiedad es muy importante en la matemática, pues permite obtener de manera visual, el valor de la tangente de un ángulo.

2. Analicen la figura 25.4. Observen el efecto en la longitud *ED*, al mover el punto *B* sobre la circunferencia. De ser posible realicen la exploración sobre el archivo digital de la sección "TIC y más" (página 177).

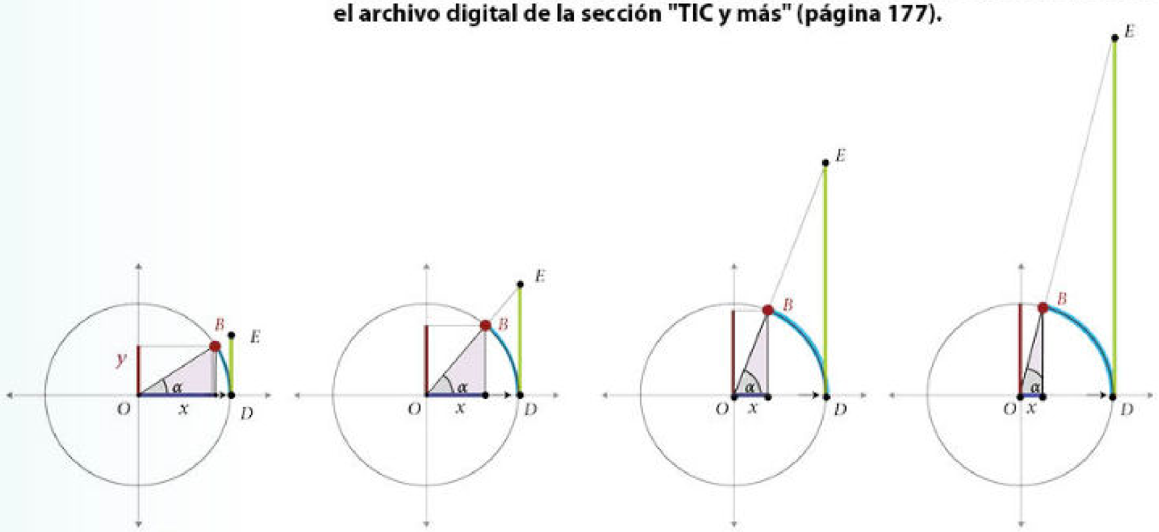


Figura 25.4

a) ¿Qué valor máximo alcanza el cateto *x*? ______ ¿Y el *y*? ______

b) ¿Qué valor mínimo alcanza el cateto *x*? ______ ¿Y el *y*? ______

c) ¿Cómo es el valor de *Tan* α con ángulo α muy pequeño? ______

¿Y cuando α es grande? ______

d) ¿Qué sucede con la razón *Sen* α cuando α es pequeño? ______

¿Y cuando α es grande? ______

e) ¿Qué sucede con la razón *Cos* α cuando α es pequeño? ______

¿Y cuando α es grande? ______

f) ¿Cuánto vale *Sen* α cuando α = 0°? ______ ¿Y cuando α = 90°? ______

g) ¿Cuánto vale *Cos* α cuando α = 0°? ______ ¿Y cuando α = 90°? ______

Reorganicen los equipos de trabajo y resuelvan los siguientes problemas.

3. Ana Luisa se encuentra a 260 m de la base de la Torre Latinoamericana. Desde ahí, puede observarse la punta de la antena, con un ángulo de elevación de 35° (figura 25.5).

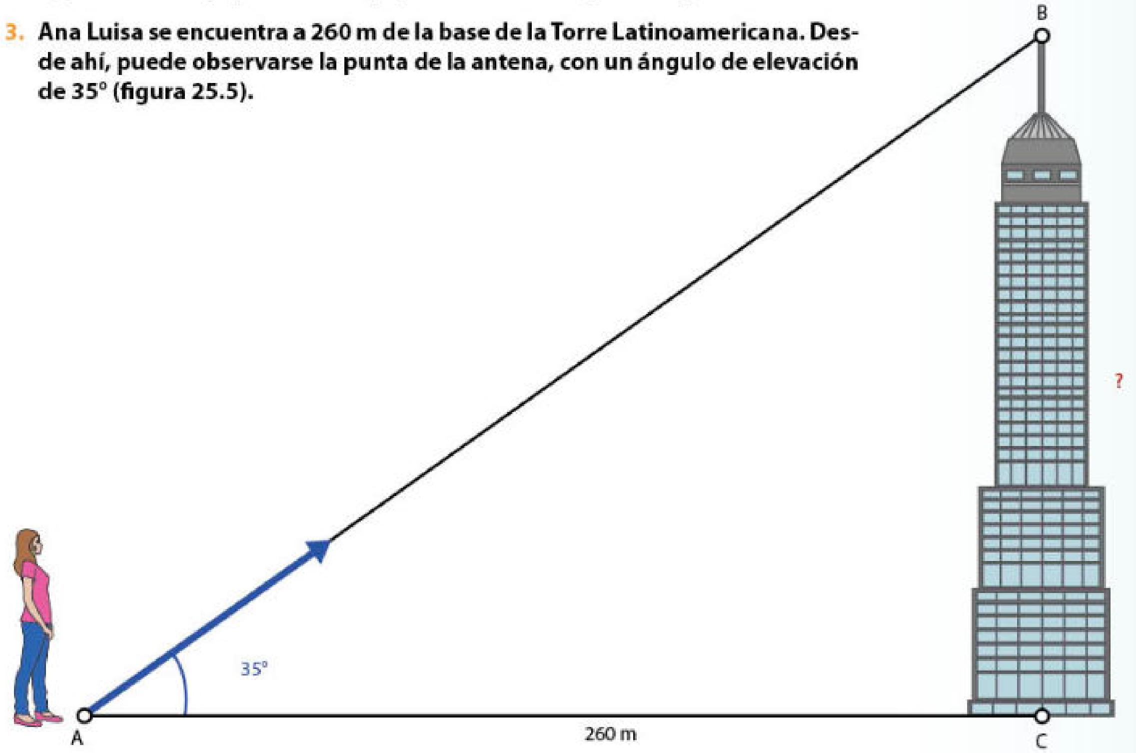


Figura 25.5

a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona el ángulo de elevación, la distancia entre Ana Luisa y la torre y, la altura desconocida del inmueble? ______

b) Usando esta razón trigonométrica, ¿es factible calcular la altura de la torre? ¿Por qué? ______

c) ¿Cuál es la altura de la torre? ______

d) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la distancia *AB*, el ángulo de elevación y la distancia entre Ana Luisa y la torre? ______

e) Con esta razón trigonométrica, ¿cuánto mide la distancia entre *A* y *C*?

______

4. Una escalera de 5 m se apoya justo en el borde de la pared; forma un ángulo de 79° (figura 25.6).

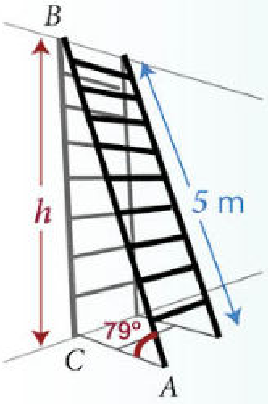


Figura 25.6

a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la altura *h*, la longitud de la escalera y el ángulo de elevación? ______

b) Con esta razón trigonométrica, ¿cuánto mide la altura de la pared? ______

c) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la distancia del pie de la escalera al muro, el ángulo de elevación y la longitud del aparato? ______

d) ¿Qué distancia separa el pie de la escalera de la pared? ______

5. **La misma escalera del problema 4 resbala por la pared.**

a) Se desliza hasta que la altura alcanzada sobre la pared es de 3 m. ¿Qué distancia hay entre el pie de la escalera y el muro? ______

Argumenten matemáticamente la respuesta. ______

b) ¿Qué distancia sobre la pared alcanza cuando los ángulos agudos del triángulo formado son de 45°? ______

c) ¿Cuánto mide el ángulo de elevación justo cuando el aparato se ha deslizado hasta alcanzar sobre la pared sólo 1 m? ______

¿Por qué? ______

6. **Desde cierto faro, a una altura de 46.73 m, se observan los extremos del islote con distintos ángulos de visión (figura 25.7).**

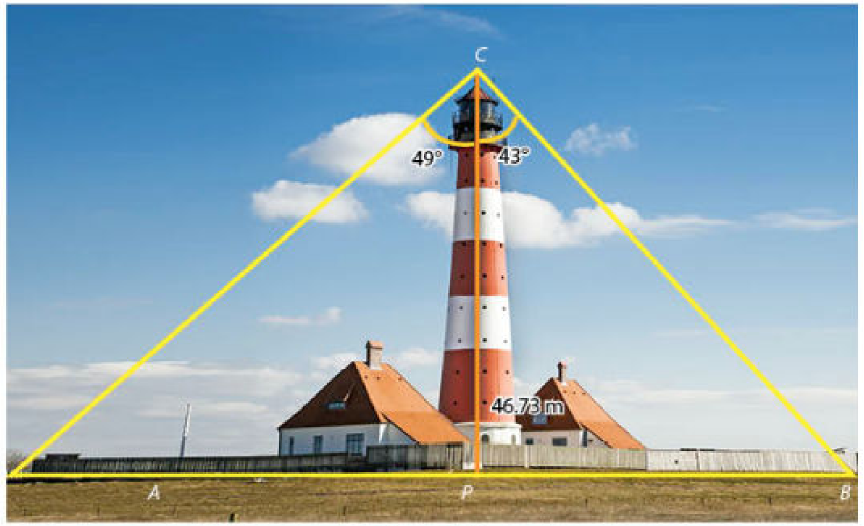


Figura 25.7

a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la altura del faro, el ángulo de visión hacia el extremo *A* y la distancia de *A* a *P*? ______

b) ¿Qué distancia separa al punto *A* de *P*? ______

¿Por qué? ______

c) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la altura del faro, el ángulo de visión hacia el extremo *B* y la distancia de *P* a *B*? ______

d) ¿Qué distancia separa el punto *P* de *B*? ______

¿Por qué? ______

e) ¿Cuál es la longitud del islote? ______

¡Qué curioso!

El astrolabio es un instrumento matemático que permite determinar la posición de los astros o medir distancias por la *triangulación*, un procedimiento como el usado en el problema 6.

Figura 25.8

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Hazlo tú mismo!

Individual

1. **Toma una hoja tamaño carta y haz el primer doblez que indica la actividad de *Punto de partida;* se obtendrá el triángulo *ABC*. Aunque h_1 puede obtenerse por el teorema de Pitágoras, por esta ocasión lo plantearemos con el uso de la trigonometría (figura 25.9).**

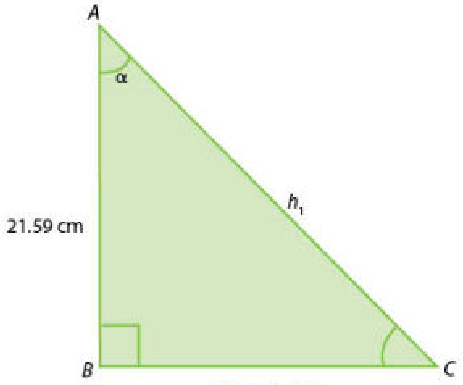


Figura 25.9

a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona h_1, el cateto *AB* y el ángulo α? ______

b) ¿Cuánto mide h_1? ______

c) ¿Este valor es el mismo que el obtenido con el teorema de Pitágoras? ______

Argumenta matemáticamente. ______

2. **Haz el segundo doblez sobre la mediatriz del ángulo α. El triángulo obtenido es el de la figura 25.10.**

a) ¿Cuánto mide β? ______ ¿Por qué? ______

b) ¿Qué razón trigonométrica relaciona h_2, el cateto *AB* y el ángulo β? ______

c) ¿Cuánto mide h_2? ______

d) ¿Este valor es el mismo que el obtenido con el teorema de Pitágoras? ______

Argumenten matemáticamente. ______

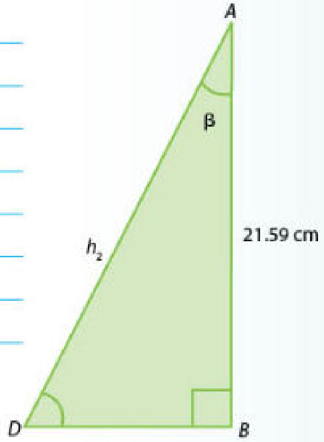


Figura 25.10

Y mientras tanto en...

Historia, segundo grado, bloque 1, uno de los temas para reflexionar fue "De la navegación costera a la ultramarina".
Escribe en media cuartilla la aplicación del estudio de la trigonometría en este proceso de dominio del mar.

Lección 26

Eje: Manejo de la información.
Tema: Proporcionalidad y funciones.
Contenido: Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Razón de cambio y sus propiedades

En los cursos de matemáticas de grados anteriores estudiaste procesos y fenómenos de la física, la economía y la vida cotidiana, entre otros; y aprendiste que se pueden modelar matemáticamente como relaciones entre conjuntos de cantidades. Según las características, unas relaciones son de proporcionalidad y otras corresponden a funcionales lineales. En la modelación matemática hay diversas formas de representar esos fenómenos y procesos: expresiones algebraicas, tablas y gráficas.

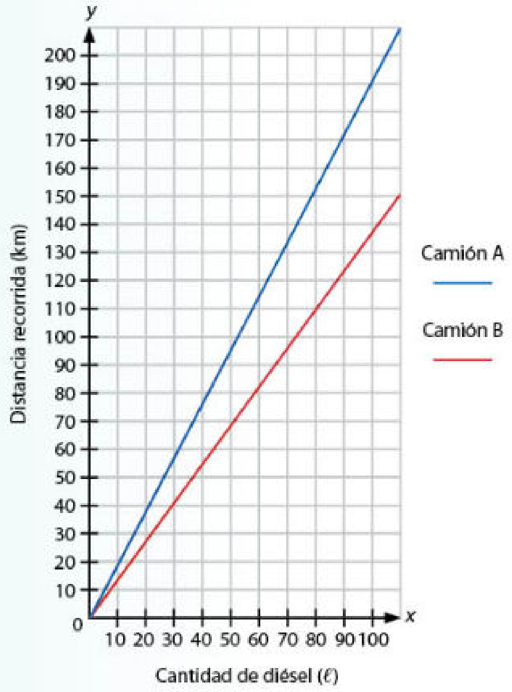
En la lección estudiarás las razones de cambio de dos conjuntos de cantidades que están en una relación de proporcionalidad directa; o bien, que corresponden a una función lineal.

Punto de partida

Cierta empresa de transporte de mercancías analiza entre dos marcas de camiones de carga el correspondiente *rendimiento:* la cantidad de diésel que gastan por distancia recorrida.

En la gráfica 26.1 se muestra la relación entre el gasto de diésel y la distancia recorrida por dos camiones de carga. En ambos casos se consideró que el gasto de diésel es constante.

Observa la gráfica y responde lo siguiente:



Gráfica 26.1

a) De acuerdo con la información de la gráfica, ¿la relación entre la cantidad de diésel y la distancia recorrida es de proporcional directa? ______

Explica por qué. ______

b) ¿Qué distancia recorre el camión *A* con 3 litros de diésel? ______

c) ¿Qué cantidad de diésel gasta el camión *B* al recorrer 90 kilómetros? ______

d) Identifica qué distancia recorre cada camión con 5 litros de diésel. ¿Cuál recorre menor distancia? ______

e) Según los datos de la gráfica, ¿cuál camión tiene el mejor rendimiento? ______

En equipos comparen las respuestas. Comenten los procedimientos seguidos para contestar las preguntas.

Aprendemos

Individual

1. Analiza la información de la gráfica anterior y completa la tabla 26.1:

Cantidad de diésel (l)	Distancia recorrida (km)	
	Camión *A*	Camión *B*
0		
1		15
2	40	
4		
5		
	160	120
10		

Tabla 26.1

a) Resuelve lo siguiente para el camión *A*:

- Cuando la distancia recorrida se incrementa de 40 a 100 kilómetros, la cantidad de diésel lo hace de ______ a ______ litros. Con esos datos calcula este cociente:

$$\frac{\text{Incremento de la distancia recorrida (km)}}{\text{Incremento de la cantidad de diésel } (\ell)} = \frac{100 - 40 \text{ km}}{5 - \_\_\_\_ \ \ell} = \_\_\_\_ =$$

- Cuando la distancia recorrida se incrementa de 20 a ______ kilómetros, la cantidad de diésel lo hace de ______ a 8 litros. Con esos datos calcula este cociente:

$$\frac{\text{Incremento de la distancia recorrida (km)}}{\text{Incremento de la cantidad de diésel } (\ell)} = \frac{\_\_\_\_ - 20 \text{ km}}{5 - \_\_\_\_ \ \ell} = \_\_\_\_ =$$

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite identificar la distancia que recorrió el camión *A* en función del diésel consumido? ______
- Compara los cocientes obtenidos y la constante de proporcionalidad. ¿Cómo son entre sí las cantidades? ______

b) Resuelve lo siguiente para el camión *B*:

- Calcula el cociente de la distancia recorrida, cuando se incrementa de 1 a 75 km, entre el aumento de la cantidad de diésel correspondientes

$$\frac{\text{Incremento de la distancia recorrida (km)}}{\text{Incremento de la cantidad de diésel } (\ell)} =$$

- Calcula el cociente de la distancia recorrida, cuando se incrementa de 30 a 120 km, entre el aumento de la cantidad de diésel correspondientes

$$\frac{\text{Incremento de la distancia recorrida (km)}}{\text{Incremento de la cantidad de diésel } (\ell)} = \frac{\_\_\_\_ - 30 \text{ km}}{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$$

Acuérdate de...

Un cociente de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, tiene diferentes interpretaciones. La más conocida es la de fracción. Otra corresponde a la de **razón**, una comparación de dos cantidades.

Una razón de la forma $\frac{a}{b}$ también se representa como $a : b$; y ambas expresiones se leen "*a* es a *b*".

En contexto

No hay duda: la invención de los vehículos automotores revolucionó la vida de la humanidad. Gracias a ellos podemos desplazarnos con cierta autonomía; sin embargo, también trajeron consigo consecuencias negativas, pues se sabe que son una de las mayores fuentes de contaminación del aire por la emisión de gases como monóxido de carbono (CO) y óxidos de nitrógeno, así como compuestos orgánicos volátiles (COV); lo que genera daños a la salud como padecimientos cardiovasculares y respiratorios, algunos tipos de cáncer, malformaciones congénitas, entre otros. Además, los neumáticos que se desechan son un gran foco de contaminación, ya que son no degradables.
Existen formas de reducir la contaminación generada por los vehículos, como caminar y usar bicicleta para desplazarse, ¿cuáles otras conoces?

- ¿Cuál constante de proporcionalidad permite encontrar la distancia recorrida por el camión *B* en función del diésel consumido?
- Compara los cocientes obtenidos y la constante de proporcionalidad. ¿Cómo son entre sí las cantidades? ______

c) ¿Cuál camión tiene el mejor rendimiento? ______ Explica por qué.

______

Comparte las respuestas con otros compañeros. Comenten por qué la constante de proporcionalidad es igual al cociente de la distancia recorrida entre el gasto de diésel.

¡Ya lo aprendimos!

Hemos estudiado que cuando dos conjuntos de cantidades están vinculadas entre sí, se puede estudiar el cambio o incremento de una respecto al de la otra. Así, vimos que la distancia recorrida por los camiones y el diésel consumido guardan una relación de proporcionalidad directa; y se pueden comparar los incrementos de ambas cifras.

Incremento del gasto de diésel			Incremento de la distancia recorrida
	2 ℓ	30 km	
	6 ℓ ↓	↓ 90 km	
	8 ℓ	120 km	

Llamaremos razón de cambio al cociente que se obtiene al dividir el incremento de una cantidad entre el incremento correspondiente a la otra.

En el ejemplo, la razón de cambio de la distancia recorrida y el correspondiente cambio del gasto de diésel es $\frac{90}{6} = 15$, y define el rendimiento del vehículo *B*.

2. Revisa los datos obtenidos en las actividades anteriores y contesta:

a) Designa con *y* la distancia recorrida por los camiones y con *x* la cantidad de diésel que consume cada uno.

- Escribe la expresión algebraica correspondiente al rendimiento del camión *A*.

______

- Escribe la expresión algebraica correspondiente al rendimiento del camión *B*.

______

b) Analiza la siguiente información y luego responde lo que se pregunta:

Una relación de proporcionalidad directa, de la forma $y = kx$, es un caso particular de una función lineal de la forma $y = mx + b$, donde m es la **pendiente** de la recta asociada a la gráfica; y b, la ordenada al origen; es decir, el valor de y correspondiente a $x = 0$.

Al comparar ambas expresiones, vemos que m es igual a k y que b es igual a 0:

$$y = kx + 0 \qquad y = mx + b$$

Acuérdate de...

Una relación de proporcionalidad directa entre dos conjuntos de cantidades, digamos x y y, puede representarse por una expresión algebraica de la forma $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad.

- ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la gráfica del rendimiento del camión *A*?

______

- ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la gráfica del rendimiento del camión *B*?

______

- Completa la tabla 26.2 con los datos que obtuviste en las actividades anteriores:

	Camión *A*	Camión *B*
Constante de proporcionalidad		15
Razón de cambio	20	
Valor de la pendiente de la recta		
Expresión algebraica		

Tabla 26.2

Comparte las respuestas con los compañeros. Respondan y comenten las siguientes preguntas:

- ¿Qué camión tiene un rendimiento superior, el de mayor o menor valor de la pendiente?
- ¿Qué relación guardan la pendiente de cada recta y el rendimiento de cada camión?

¡Ya lo aprendimos!

Si una relación entre dos conjuntos de cantidades tiene por gráfica una línea recta, la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta.

Por ejemplo, si un automóvil se desplaza con velocidad constante de 90 km/h e inicia el recorrido 25 km más adelante que otro, la relación entre la distancia que cubre y el tiempo que tarda en hacerlo está dada por la expresión algebraica $y = 90x + 25$. Además, para esta recta la pendiente y la razón de cambio (distancia-tiempo) son iguales a 90.

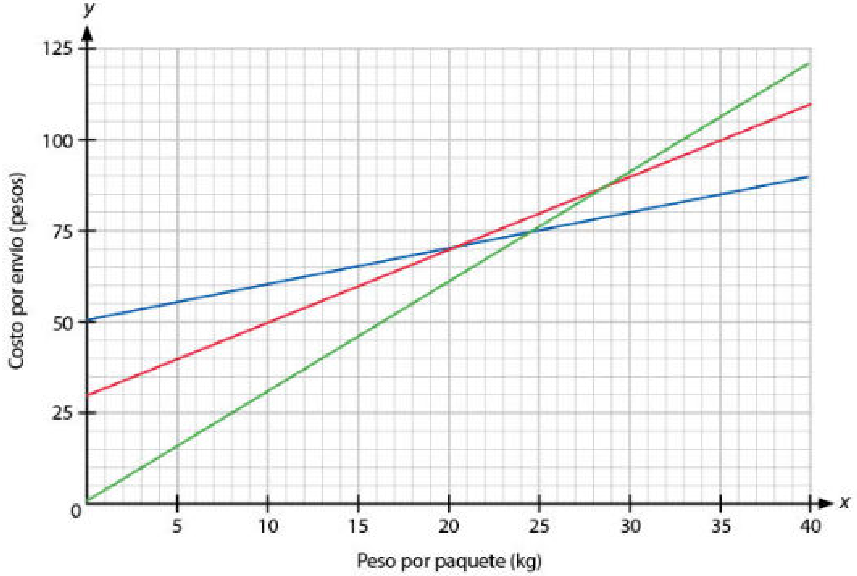
3. Tres empresas de envíos de paquetería tienen los costos por servicio de entrega en el país indicados en la tabla 26.3:

Empresa	Costo por envío (pesos)
Veloz Pack	\$ 2.00 por kilogramo del paquete, más \$ 30.00 por gastos de trasportación.
Llevamex	\$ 1.00 por kilogramo del paquete, más \$ 50.00 por gastos de trasportación.
Entrega Express	\$ 3.00 por kilogramo del paquete, sin cargo por gastos de trasportación.

Tabla 26.3

- ¿Cuál empresa tiene el mayor costo por envío de paquetes? ______
- ¿Cuál ofrece el menor costo? ______

a) En el siguiente plano cartesiano se han trazado las gráficas relativas a las tres empresas de servicio de paquetería. Observa que los ejes muestran la relación del *costo por envío* (en pesos) y el *peso por paquete* (en kilogramos):



Gráfica 26.2

- Identifica la gráfica que representa a cada empresa y completa la tabla 26.4:

Empresa	Gráfica (color)	Justifica por qué
Veloz Pack		
Llevamex		
Entrega Express		

Tabla 26.4

b) Analiza la información contenida en las gráficas y completa la tabla 26.5:

Empresa	Pendiente m	Ordenada al origen B	Expresión algebraica $y = mx + b$
Veloz Pack			
Llevamex			
Entrega Express			

Tabla 26.5

4. Analiza las gráficas y contesta las preguntas siguientes:

a) ¿Cuál es la razón de cambio (aumento del costo por envío) en Veloz Pack?

____

b) ¿Cuál es la razón de cambio en Llevamex?

____

c) ¿Cuál es la razón de cambio en Entrega Express?

____

d) ¿Cuál de las tres empresas tiene el costo más económico si se envía un paquete con peso menor de 25 kilogramos? ______________

e) ¿Y si se envían paquetes con un peso mayor de 30 kilogramos? ______________

Con otros compañeros verifica los resultados. Si difieren identifiquen los errores y corrijan.

5. La figura 26.1 muestra tres depósitos de agua:

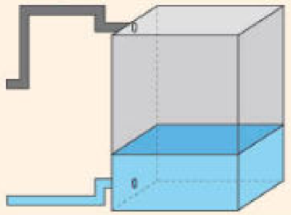
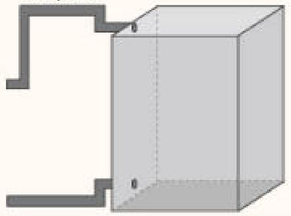
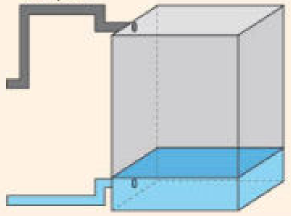
El líquido del tanque *R* alcanza una altura de 20 cm con respecto a la base. De él se extrae agua de manera que el nivel disminuye 2 cm por minuto.	 Tanque R
El tanque *S* está vacío y se llenará de manera que la altura aumente 2 cm por minuto con respecto de la base.	 Tanque S
El líquido del tanque *T* alcanza una altura de 16 cm con respecto a la base. De él se extrae agua de manera que el nivel disminuye 2 cm por minuto.	 Tanque T

Figura 26.1

a) Representa con *h* (en centímetros) la altura del agua y con *t* (en segundos) el tiempo. Escribe la expresión algebraica correspondiente para cada depósito. El nombre *Recta R* se refiere al tanque *R*, y así sucesivamente.

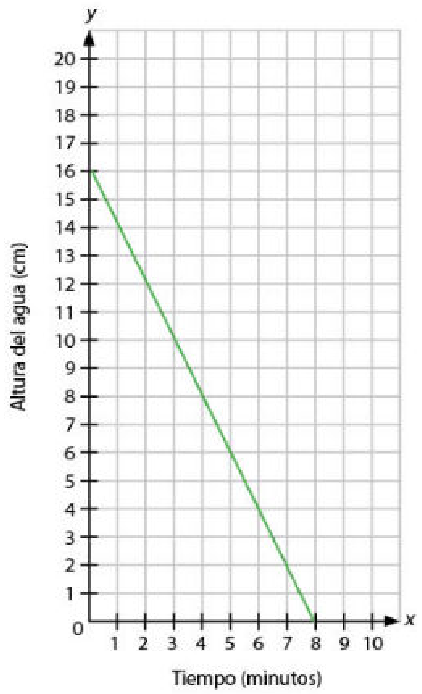
	Expresión algebraica
Recta *R*	
Recta *S*	
Recta *T*	

Tabla 26.6

b) En el plano cartesiano de la gráfica 26.3 se incluyó el trazo asociado a una de las expresiones algebraicas anteriores.

- ¿De cuál expresión algebraica se trazó la gráfica? ____________________

  Justifica la respuesta. ____________________



Gráfica 26.3

c) Traza las gráficas de los tanques faltantes. Usa colores diferentes para cada una.

d) Analiza los datos de la tabla y la gráfica, luego contesta lo siguiente:

- ¿En qué tiempo los tanques *S* y *T* tienen la misma altura? ____________
- ¿Cuáles rectas son paralelas? __________ Justifica la respuesta. ____________

____

____

e) Con la información de las gráficas completa la tabla 26.7.

Tanque	Pendiente m	Ordenada al origen B	Expresión algebraica $y = mx + b$
R			
S			
T			

Tabla 26.7

f) Analiza y contesta:

- ¿Cuál es la razón de cambio en el tanque *R*? ____________________
- ¿Cuál en el tanque *S*? ____________________
- ¿Cuál en el tanque *T*? ____________________

En equipos comparen las respuestas y comenten los procedimientos realizados para completar las tablas y trazar las gráficas.

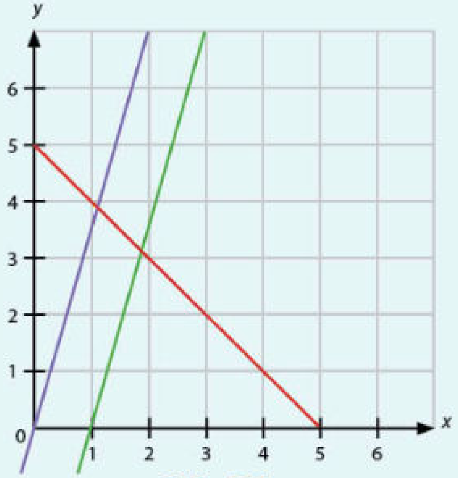
¡Ya lo aprendimos!

Dos o más rectas que tienen la misma pendiente son paralelas. Esto significa que no se intersecan.

Observa la gráfica 26.4. ¿De qué color son las rectas paralelas?

Una recta tiene pendiente negativa si al incrementar los valores de una cantidad (representados en el eje *x*) disminuyen los de la otra (representados en el eje *y*).

En la gráfica, ¿de qué color es la recta con pendiente negativa?



Gráfica 26.4

¡Hazlo tú mismo!

1. **Si un automóvil *C* se desplaza a mayor velocidad que un automóvil *A*, ¿cómo es la razón de cambio del automóvil *C* respecto a la del automóvil *A*, mayor o menor?**

a) Traza en el cuaderno las gráficas que ayuden a explicar tu respuesta.

2. **Si la razón de cambio de un automóvil *D* es mayor que la de un automóvil *B*, ¿cuál de ellos se desplaza con mayor velocidad?**

a) Traza en el cuaderno las gráficas que ayuden a explicar tu respuesta.

TIC y más

Para practicar más problemas de razón de cambio, consulta el recurso interactivo *La razón de cambio* en http://matematikamir.blogspot.mx/2012/04/razon-de-cambio-y-la-pendiente.html (Consulta: 24 de enero de 2017)

Lección 27

Eje: Manejo de la información.
Tema: Análisis y representación de datos.
Contenido: Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

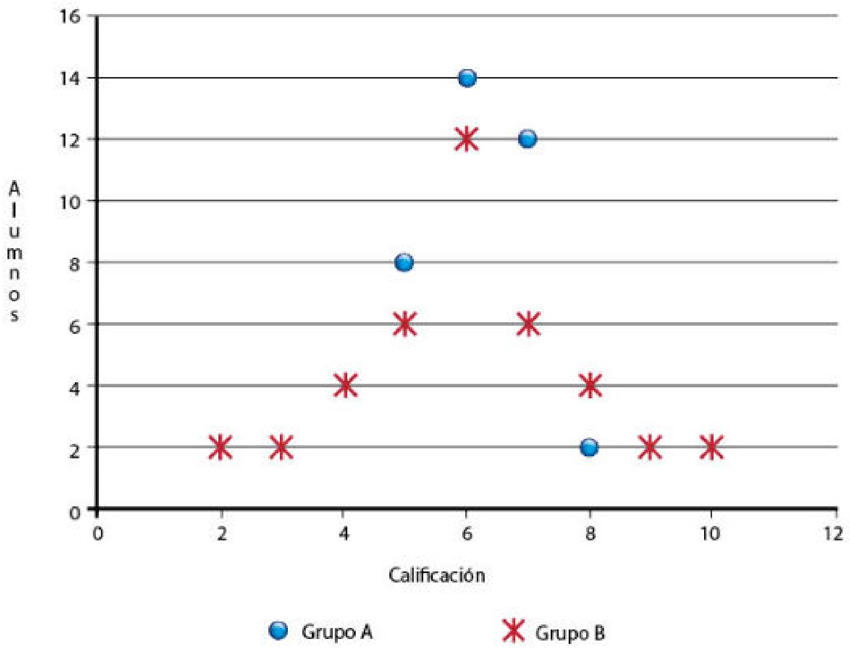
Analizando datos

En nuestros días es necesario investigar, reunir, organizar y analizar datos numéricos que ayuden a resolver problemas que implican la toma de decisiones de sucesos sociales, económicos, políticos o mercadológicos y hasta biológicos o físicos.

En esta lección aplicarás la desviación media y el rango como medidas de **dispersión**.

Punto de partida

Antes de la semana de evaluación se pidió a dos grupos de tercer año resolver una guía de estudio para el examen de Enlace. Con las calificaciones obtenidas, el profesor de matemáticas realizó la representación mostrada en la gráfica 27.1:



Gráfica 27.1

Observa la gráfica 27.1 y realiza de manera individual las siguientes actividades:

Une con color azul los puntos del grupo *A* y con rojo los del *B*.

Contesta las siguientes preguntas y justifica la respuesta:

a) ¿Qué grupo obtuvo el mejor promedio? ______

b) ¿Cuáles datos están más dispersos? ______
¿Por qué? ______

Glosario

dispersión: variación de un conjunto de datos que permite poner en juicio la confiabilidad de la medida de tendencia central.

Acuérdate de...

Media aritmética es la suma de los valores de una variable dividida entre el total de datos. También conocida como *promedio*, se representa matemáticamente con la letra "x" con una barra horizontal: $\bar{x}$.

Completa la tabla 27.1 con los valores de la gráfica 27.1:

	Grupo	
Calificación	*A*	*B*
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabla 27.1

a) ¿Cuáles son los promedios correspondientes?
Grupo A: ______
Grupo B: ______

b) Describe la separación (*dispersión*) de los números de aciertos respecto al promedio en cada grupo:
A: ______
B: ______

c) ¿Cuál grupo tiene más dispersas las calificaciones? ______

Con la guía del profesor y los compañeros reflexionen: ¿cómo medirían la dispersión de los datos de cada lista tomando como referencia la media?

______

Aprendemos

En equipo

La señora Martha tiene un acuario, y cuida mucho a los peces. El agua debe estar a cierta temperatura para que los ejemplares permanezcan siempre sanos y se reproduzcan. Constantemente la verifica y hace un registro. Si la tabla 27.2 muestra el obtenido en dos semanas, ¿qué temperatura debe mantenerse? ¿Cuál es el promedio en estos datos?

	Temperatura (° C)	
Día	Semana 1	Semana 2
Lunes	18	20
Martes	20	21
Miércoles	22	20
Jueves	24	18
Viernes	21	20
Sábado	16	21
Domingo	19	20

Tabla 27.2

En contexto

La dispersión y media aritmética son recursos matemáticos cuya aplicación nos permite estimar la tendencia y valores de los datos estadísticos; así se estima, por ejemplo, que México ocupa el primer sitio del mundo en el número de casos de acoso escolar ("bullying") en nivel secundaria; sólo Nayarit, Puebla, Tamaulipas, Veracruz y el Distrito Federal, cuentan con una ley específica para evitar la violencia escolar.
http://wradio.com.mx/programa/2014/06/09/martha_debayle/1402331400_265098.html
(Consulta: 24 de enero de 2017)

Individual

Realiza de manera individual las siguientes actividades:

1. Observa la tabla 27.2 y responde:

a) ¿En qué semana hubo más dispersión de los datos? ____________

¿Por qué? ____________

b) ¿Qué día ocurrió la mayor temperatura y de cuánto fue? ____________

c) ¿Cuál fue la más baja? ____________

2. Observa la columna de la primera semana y contesta:

a) ¿Cuál fue la menor temperatura? ____________

b) ¿Cuál la mayor? ____________

c) ¿Cuál diferencia hay entre la mayor temperatura y la menor? ____________

¿Para qué puede servir el dato? ____________ ¿Cómo están distribuidas las cantidades? ____________

d) ¿Cuál es la media aritmética o promedio de esta columna? ____________

3. Completa la tabla 27.3 para obtener la desviación; se resta a cada temperatura registrada la media aritmética (observa los ejemplos):

Día	Temperatura (° C)	Desviación	Valor absoluto de la desviación
Lunes	18		
Martes	20		
Miércoles	22	2	2
Jueves	24		
Viernes	21		
Sábado	16	−4	4
Domingo	19		

Tabla 27.3

a) ¿Cuánto suman los valores absolutos de la desviación? ____________

b) ¿Cuál es el promedio de los valores absolutos de la desviación? ____________

Glosario

rango (o recorrido): diferencia entre el dato mayor y el menor.
desviación: diferencia entre el dato registrado y la media aritmética.
desviación media (DM): media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media.
valor absoluto: el de dicho número sin su signo.

4. Anota en el cuaderno el rango, la media aritmética y la desviación media de la semana 2 y responde en cuál periodo hubo mayor dispersión de los datos.

____

¡Ya lo aprendimos!

El **rango** indica la longitud del intervalo en que se hallan todos los datos; sin embargo, si aquél es muy pequeño, éstos se hallarán muy cercanos y la variabilidad será poca, aunque no es seguro. Por eso importa calcular cuánto se desvían en promedio los datos de la media: debe encontrarse la **desviación media** (DM), expresada matemáticamente de la siguiente manera:

$$D_{\bar{x}} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{N}$$

$D_{\bar{x}}$ = desviación media

$|x_n - \bar{x}|$ = diferencia en valor absoluto entre cada variable y la media aritmetica

N = número total de datos

Por ejemplo, si tenemos la siguiente distribución 18, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 9, el rango es 18 − 3 = 15, lo cual indica mucha variabilidad en los datos. Además, podemos encontrar la desviación media. Entonces:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
18	3	8	8	9	8	9	9

La media aritmética, el promedio de los datos, es $\bar{x} = 9$

$$D_{\bar{x}} = \frac{|18-9|+|3-9|+|8-9|+|8-9|+|9-9|+|8-9|+|9-9|+|9-9|}{8}$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{|+9|+|-6|+|-1|+|-1|+|0|+|-1|+|0|+|0|}{8}$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{+9+6+1+1+0+1+0+0}{8} = \frac{18}{8} = 2.25$$

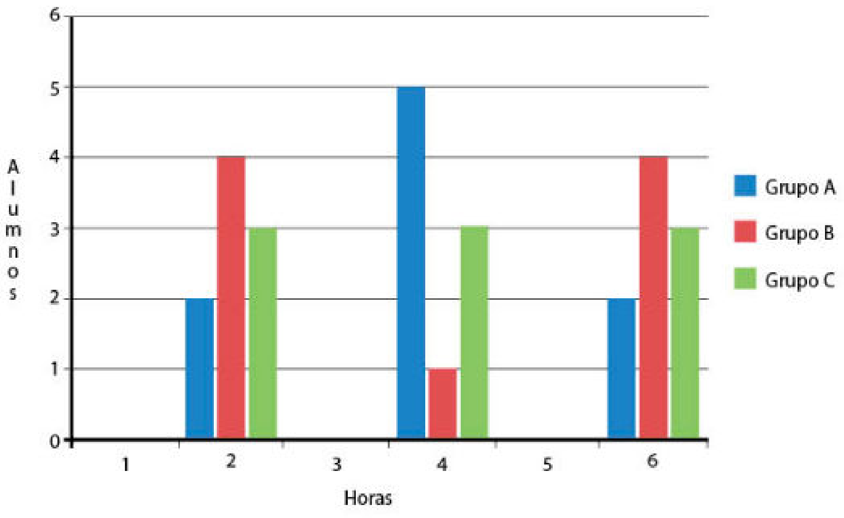
Por tanto, la desviación media es de 2.25.

Aprendemos

En equipo

Se preguntó a 9 alumnos de 3 grupos cuántas horas diarias invierten en las tareas escolares. Los datos obtenidos se presentan en la gráfica 27.2.

1. **En equipo observen y analicen la gráfica 27.2:**



Gráfica 27.2

a) Justifiquen qué grupo presenta mayor dispersión. ______

b) En el cuaderno dibujen por separado la gráfica resultante de cada uno de los grupos y encuentren la media, el rango y la desviación media en cada uno de ellos.

Grupo A	Grupo B	Grupo C
$\bar{x}$ = ______	$\bar{x}$ = ______	$\bar{x}$ = ______
Rango = ______	Rango = ______	Rango = ______
DM = ______	*DM* = ______	*DM* = ______

Tabla 27.4

2. **Observen las gráficas dibujadas en el cuaderno: presentan una forma distinta. Por ejemplo, la del grupo *A* es una V invertida; la del *B*, una V; y la del *C*, de forma uniforme.**

3. **Verifiquen sus respuestas con los otros equipos. Con base en el análisis del párrafo anterior respondan lo siguiente: ¿Cómo se relaciona en términos generales la magnitud de la desviación media (DM) con la forma de las gráficas de frecuencia?**

______

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Hazlo tú mismo!

Individual

1. **Según los datos 5, 6, 7, 7, 8, 9, calcula la desviación media.** ______

2. **Calcula el rango, el promedio y la desviación media de los siguientes datos: 7, 7, 9, 10, 8, 7, 7, 5, 5, 6, 9, 9, 10, 7, 8, 8, 6, 7, 6, 6.**

$\bar{x}$ = ______

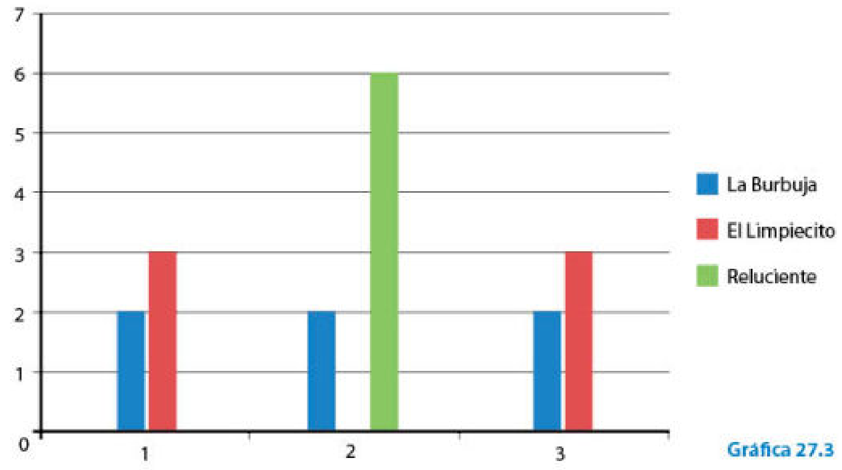
Rango = ______

Dm = ______

3. **Se realizó una encuesta telefónica para saber el grado de satisfacción de los clientes sobre tres detergentes en polvo. Las respuestas se registran al presionar una tecla con los siguientes criterios: si el consultado…**
   - Presiona la tecla 1, "está satisfecho".
   - Presiona la tecla 2, "está poco satisfecho".
   - Presiona la tecla 3, "no está satisfecho".

A continuación se muestran la gráfica 27.3 y los resultados obtenidos:

La Burbuja: 1, 1, 2, 2, 3, 3   El Limpiecito: 1, 3, 3, 3, 1, 1   Reluciente: 2, 2, 2, 2, 2, 2



Gráfica 27.3

a) ¿Cuál es el promedio de cada producto? ______

b) ¿Qué producto tiene mayor dispersión? ______

c) Encuentra la desviación media en cada caso.

La Burbuja *DM* = ______ El Limpiecito *DM* = ______ Reluciente *DM* = ______

Lee cada situación y elige la respuesta correcta:

Situación 1. Los primeros cinco elementos de una sucesión cuadrática son:

0, 2, 6, 12, 20

1. **¿Cuáles son los siguientes cinco?**

   a. 30, 42, 56, 72, 90   *c.* 29, 41, 55, 71, 89

   b. 31, 43, 57, 73, 91   *d.* Otros. Escríbelos. ______

2. **¿Qué elemento se encuentra en la posición 30?**

   a. 869   *b.* 871   *c.* 870   *d.* Otro. Escríbelo. ______

3. **¿Cuál regla genera la sucesión anterior?**

   a. $n^2 - n$ *b.* $n^2 + n$ *c.* $n^2 - n + 1$ *d.* Otra. Escríbela. ______

Situación 2. Encuentra los términos faltantes de la siguiente sucesión:

5, 10, 17, ______, 37, 50, ______, 82, ______, 122, 145…

a. 26, 65, 101   *b.* 27, 65, 102   *c.* 26, 65, 103   *d.* Otros. Escríbelos. ______

1. **¿Qué elemento se encuentra en la posición 50?**

   a. 2 602   *b.* 2 603   *c.* 2 604   *d.* Otro. Escríbelo. ______

2. **¿Cuál regla genera la sucesión anterior?**

   a. $n^2 - 2n + 2$ *c.* $n^2 - 2n - 2$

   b. $n^2 + 2n + 2$ *d.* Otra. Escríbela. ______

Situación 3. Para proteger contra caídas, la escalera debe formar un ángulo de 75° o menos con el piso. ¿Qué altura máxima puede alcanzar en forma segura una de 30 m de longitud?

a. 29 m   *c.* 28.977 m

b. 22 m   *d.* Otra. Escríbela. ______

1. **¿Qué razón trigonométrica te sirvió para encontrar la solución?**

   a. Seno   *c.* Tangente

   b. Coseno   *d.* Otra. Escríbela. ______

Situación 4. Un faro está sobre la playa y tiene 675 m de altura. Desde lo alto de él y en un ángulo de depresión de 76° se divisa cierta embarcación, como se muestra en la figura 4.1. ¿A qué distancia de la base de aquél se encuentra ésta?

a. 2 707.28 m   *c.* 2 567.65 m

b. 2 607.9 m   *d.* Otra. Escríbela. ______

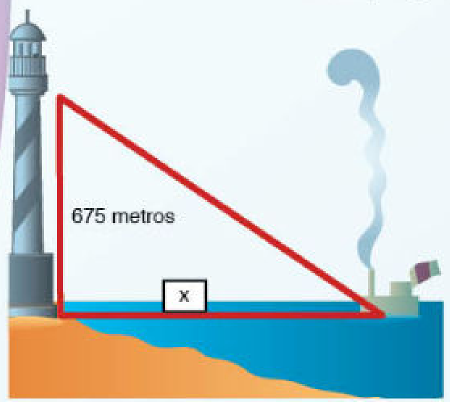
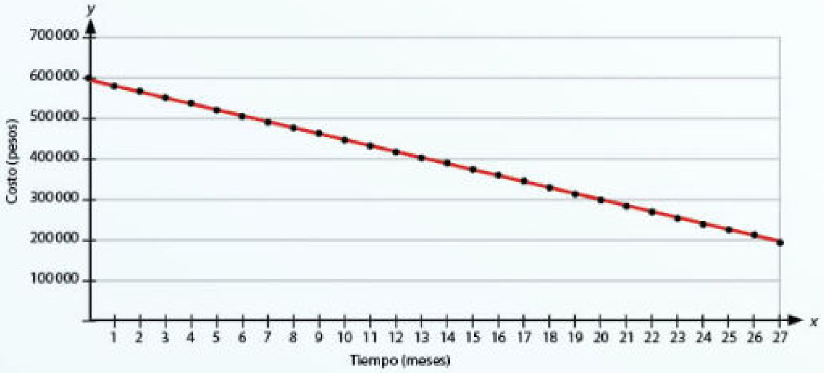


Figura 4.1

Situación 5. Manuel planea comprar a mensualidades un departamento que cuesta $600 000.00. Observa la gráfica 4.1 y elige la opción correcta:



Gráfica 4.1

1. **¿Cuál es la razón de cambio en el precio del departamento entre el sexto y segundo mes?**

   a. −20 000   *b.* −15 000   *c.* −10 000   *d.* Otra. Escríbela. ______

2. **¿En cuántos meses podrá pagar Manuel la mitad del costo del departamento?**

   a. 18   *c.* 20

   b. 16   *d.* Otros. Escribe la cantidad. ______

3. **Si x representa los meses y y el costo, ¿cuál expresión algebraica corresponde a la situación anterior?**

   a. $y = 600\,000 - 15\,000x$ *c.* $y = 600 - 15x$

   b. $y = 600\,000 + 15\,000x$ *d.* Otra. Escríbela. ______

Situación 6. Se entrevistó al azar a 15 empleados de 2 fábricas distintas sobre el sueldo quincenal. Los resultados (en pesos) de la encuesta se muestran enseguida:

Fábrica 1:	2500	2500	3000	3000	3000	3000	2500	5000	3000	15 000	10000	2500	3000	6000	6000
Fábrica 2:	2500	5000	5000	6000	6000	5000	4000	3500	3500	3500	10000	6000	5000	2500	2500

1. **Roberto busca trabajo y quiere saber cuál fábrica representa mejor opción; al calcular la media aritmética de los datos anteriores y obtiene el mismo resultado para ambas, $4 666. ¿Cuál le conviene más? Utiliza lo que sabes de desviación media.**

   a. Fábrica 1   *b.* Fábrica 2   *c.* Otra. Escríbela ______

2. **¿En cuál de las dos fábricas los datos están más dispersos?**

   a. Fábrica 1   *b.* Fábrica 2   *c.* Otra. Escríbela ______

Bloque 5

Aprendizajes esperados

Al terminar el estudio del presente bloque serás capaz de:

- Resolver y plantear problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipar cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Leer y representar, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resolver problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Comprender un fenómeno implica, entre otros aspectos, poder representarlo por medio de un modelo matemático. Por ejemplo, cuando tenemos un problema con una sola variable basta una ecuación para develar su secreto; pero ante situaciones más complejas se requiere el planteamiento de todo un sistema. Las de distintas variables inundan, literalmente, nuestro entorno. Una muestra cotidiana estriba en los contenedores de agua: conjugan formas cilíndricas y cónicas, y el volumen representa una función que depende de dos variables, el radio de la base y su altura.

Para completar el escenario matemático, exploraremos fenómenos que requieren otro tipo de tratamiento, en cuyas entrañas florecen comportamientos relacionados con el azar. Pero, ¡cuidado!, no todos los eventos por explorar son equiprobables.

Lección 28

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema: Patrones y ecuaciones.
Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Resolviendo problemas con ecuaciones

En muchos problemas se requiere hallar una o más cantidades desconocidas que cumplen ciertas condiciones bien definidas e involucran las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación, división, exponenciación y radicación. Por ejemplo:

El producto de dos números consecutivos es 30, ¿cuáles son?

Para encontrarlos *(las incógnitas)* se plantea una ecuación. En esta lección explorarás la utilidad de las ecuaciones lineales con una o más incógnitas, así como de las cuadráticas con una para resolver problemas.

Punto de partida

En parejas relacionen las columnas siguientes trazando una recta de la ecuación a su solución; usen cualquiera de los métodos vistos.

Ecuaciones	Soluciones
a) $3x + 4 = 6x - 8$	$x = -\frac{3}{80}$ y $y = -1350$
b) $8x - 5y = 1$	$x = 4$
$5x + 8y = -1$	
c) $x^2 - 6x + 9 = 0$	$x = -3$
d) $x^2 + y^2 = 1$	$x = 0$ y $y = 1$
$-x^2 + y = 1$	

Completen la tabla 28.1 para encontrar los valores de *x* y de *y* en la función $y = -3x + 9$:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y									

Tabla 28.1

a) Con ayuda de la tabla determinen la solución de la ecuación $-3x + 9 = 0$.

b) Calculen el valor de *x* con exactitud de una cifra decimal que dé el valor más cercano a $\frac{1}{2}$. Expliquen cómo lo hallaron. ____________

c) Escriban en el cuaderno la ecuación para *x* deducida del inciso b). ¿De qué clase es? ____________

d) Resuelvan por métodos algebraicos la ecuación. ¿Cuál es la solución? ____________

e) Grafiquen en el cuaderno los valores de la tabla 28.1. ¿Qué tipo de gráfica se obtiene? ____________

f) Usen la gráfica obtenida en el inciso e) para resolver de nuevo la ecuación hallada en el inciso c). ¿Cuál es una solución? ____________

g) Comparen las soluciones de los incisos c) y d) para el b). ¿En cuánto difieren las soluciones halladas por los diferentes métodos? ____________

¿A qué se deben las discrepancias, si las hay? ____________

Consideren el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$12x + 9y = 21$

$15x + 2y = 17$

a) Despejen *y* de cada una de las ecuaciones anteriores y completen la tabla 28.2:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (primera ecuación)									
y (segunda ecuación)									

Tabla 28.2

b) De acuerdo con los valores de la tabla 28.2 determinen con exactitud de una cifra decimal los valores de *x* y de *y* que sean soluciones del sistema de ecuaciones. Escriban en el cuaderno cómo lo resolvieron. ____________

c) Grafiquen cada una de las parejas de la forma (*x*, *y*) de la tabla 28.2. ¿Qué tipo de gráficas obtienen? ____________ ¿Qué observan? ____________

d) ¿Cómo encontrar una solución del sistema original a partir de las gráficas trazadas en el inciso c)? ____________

e) Resuelvan de manera algebraica el sistema inicial por cualquiera de los métodos que conozcan. ¿Cuáles son las soluciones de dicho sistema? ____________

f) Comparen las respuestas halladas en los incisos b) a e). ¿En cuánto difieren las soluciones halladas por los diferentes métodos? ____________

¿A qué creen que se deban las discrepancias, si las hay? ____________

Consideren la ecuación de segundo grado con una incógnita $4x^2 + 2x - 3 = 0$ y contesten lo siguiente:

a) Consideren la ecuación de la forma: $y = 4x^2 + 2x - 3$, completen la tabla 28.3:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y									

Tabla 28.3

b) Grafiquen en su cuaderno los valores de la tabla 28.3. ¿Qué tipo de gráfica obtuvieron? ____________

c) Hagan uso de la gráfica del inciso b) para identificar una solución de la ecuación $4x^2 + 2x - 3 = 0$ con exactitud de una cifra decimal. ¿Dicha solución es única? ____________

¿Por qué? ____________

d) A través de un método algebraico resuelvan la ecuación $4x^2 + 2x - 3 = 0$. ¿Cuál es una solución? ____________ ¿El método algebraico permite determinar si la ecuación tiene una única solución? ____________

Justifiquen las respuestas. ____________

e) ¿En cuánto difieren las soluciones halladas en incisos c) y d)? ____________

¿A qué creen que se deban las discrepancias si las hay? ____________

Acuérdate de...

Si deseas resolver una ecuación lineal de una incógnita puedes llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Eliminar paréntesis.
2. Eliminar denominadores.
3. Agrupar términos semejantes.
4. Reducir términos semejantes.
5. Despejar la incógnita.
6. Realizar la comprobación.

En resumen, debe llevarse la ecuación que modela el problema a la forma $ax + b = c$, de donde se desprende que $x = \frac{c-b}{a}$.

Para resolver una ecuación cuadrática puedes usar algunos de estos métodos:

1. Factorización: Busca llevar la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ a la forma $(x - r_1)(x - r_2) = 0$, donde $r_1 + r_2 = \frac{b}{a}$ y $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$.
2. Usa la fórmula general
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si tienes que resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas; por ejemplo:

$$ax + by = c \qquad dx + ey = f$$

puedes usar los siguientes métodos:

1. Suma y resta. Multiplica las ecuaciones por números adecuados para luego sumarlas o restarlas.
2. Sustitución. Despeja una de las incógnitas en función de la restante para sustituirla en la otra ecuación.
3. Igualación. Multiplica las ecuaciones por números convenientes para luego igualarlas.

La idea es eliminar alguna de las incógnitas y resolver una ecuación lineal de una incógnita.

Aprendemos

En equipo

En equipo resuelvan los siguientes problemas:

1. Una pipa con agua transporta sólo 30% de su capacidad. En la primera escala se le añaden 300 ℓ; después, en la segunda, se vacía 20% de la capacidad total, de tal manera que sólo quedan 240 ℓ. Se desea saber la capacidad de la cisterna y la cantidad inicial de líquido.

a) Escojan una letra para denotar la capacidad total de la cisterna. Con una expresión algebraica representen que la cisterna está a 30% de su capacidad.

____

b) Escriban una expresión algebraica para representar que se añadieron a la cisterna 300 ℓ ________________

c) Con la expresión hallada en b) escriban una expresión algebraica para representar que la cisterna perdió 20% de la capacidad total en la segunda escala.

____

d) Con la hallada en c) escriban una expresión algebraica para representar que tras la segunda escala quedaron sólo 240 ℓ. ¿Qué tipo de ecuación se obtiene?

________________ ¿Por qué? ________________

e) ¿Cómo resolverían la ecuación obtenida en d)? ________________

¿Cuál es una solución de dicha ecuación? ________________

f) ¿La ecuación hallada en d) tiene una única solución? ________________

¿Por qué? ________________

g) ¿Con lo obtenido en los incisos a) a f) podrían dar una solución al problema?

________________ ¿Cuál? ________________

2. Rodrigo planea construir un gallinero para su granja. Lo diseña de forma que tenga una base rectangular e impone dos condiciones: que el largo y el ancho difieran sólo por 3 m; y el área del corral sea de 64 m². ¿Cuáles son las dimensiones?

a) Representen con un dibujo el gallinero.

b) Escojan letras para representar el ancho y el largo del gallinero. Escriban una expresión algebraica que refleje la diferencia de 3 m existente entre ambos.

____

c) ¿El largo depende del ancho? ________________ ¿Por qué? ________________

____

d) Escriban una expresión algebraica para expresar que el área de la base del gallinero es de 64 m².

____

e) De acuerdo con sus respuestas en los incisos b) y c), ¿se concluiría que el área de la base del gallinero depende sólo del ancho? ________________

¿Por qué? ________________

____

f) Escriban una expresión algebraica que represente su respuesta del inciso c).

____

g) ¿Qué clase de ecuación se obtiene en el inciso d)? ________________

Justifiquen la respuesta. ________________

____

h) Con cualquier método algebraico resuelvan la ecuación encontrada en d) y escriban en el cuaderno todos los pasos para hallar una solución. Si la hay, ¿es única? ________

¿Por qué? ________________

____

i) ¿Qué respuesta sobre el problema darían a Rodrigo? ________________

3. Una empresa tiene dos tipos de productos: el *A* y el *B*. La ganancia por unidad del primero es de \$1.80; y la del segundo, de \$2.30. El costo de producción es respectivamente de \$0.60 y \$0.90. La empresa planeó la inversión productiva del próximo año. El total programado es de \$215 000.00 y se desea obtener una ganancia de \$328 000.00. ¿Cuántas unidades *A* y *B* se generarán para cumplir las condiciones impuestas sobre el costo y la ganancia?

a) Escriban una expresión algebraica para representar el costo de producir todas las unidades *A* y otra para *B*. Justifiquen la respuesta. ________________

____

b) Escriban una expresión algebraica para representar la ganancia obtenida de todas las unidades de *A* y otra para *B*. Justifiquen la respuesta. ________________

____

c) Escriban una expresión algebraica para representar el costo de producción de todas las unidades de *A* y *B*, $215 000.00. ____________

Justifiquen la respuesta. ____________

d) ¿Cuál expresión algebraica representa la ganancia obtenida de todas las unidades de los productos *A* y *B*, de $328 000.00? ____________

Justifiquen la respuesta. ____________

e) Consideren las ecuaciones de los incisos c) y d). ¿Qué nombre reciben éstas?

f) Resuelvan las ecuaciones de los incisos c) y d) por dos métodos: gráfico y algebraico. ¿Cuántas y cuáles son las soluciones de las ecuaciones si las hay?, ¿fueron iguales? ____

Justifiquen la respuesta. ____________

En contexto

En economía se aplican fórmulas y ecuaciones para despejar incógnitas, como las curvas de oferta y demanda; este tipo de relaciones son útiles para saber cómo lanzar un producto al mercado y éste pueda ser más atractivo para el cliente y se obtengan mayores ganancias.

4. Analicen los enunciados y relaciónelos con las ecuaciones que los representen:

a) La edad de Raúl más la de José suman 27, pero el doble de la edad de Raúl menos 18 es la de José. ¿Cuáles son las edades de cada uno?	$x^2 + 3x + 2 = 20$
b) Se tienen tres enteros consecutivos. Si el producto del segundo por el tercero es 20, ¿de cuáles tres números se trata?	$3x - 7 = 8$
c) El triple de un número menos siete unidades da ocho. ¿Cuál es el número?	$2x - y = 18$ $x + y = 27$

5. Para cada una de las siguientes ecuaciones planteen un problema y encuentren la solución:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $5x + 7y = -1$ y $-3x - 4y = -1$

6. En grupo compartan los enunciados propuestos en el punto 5. Expliquen las diferencias.

¡Ya lo aprendimos!

Usualmente, los problemas que se resuelven a través de una ecuación surgen cuando se quiere determinar el valor de una o más cantidades sujetas a condiciones específicas, dadas con frecuencia por medio de ecuaciones.

En conclusión, las siguientes sugerencias pueden funcionar en muchos problemas que requieren solución al resolver una o más ecuaciones:

1. **Determinar cuál o cuáles son las incógnitas, cuáles los datos y cuáles las condiciones.**
2. **Elegir letras o símbolos convenientes para representar las incógnitas. Procurar no usar la misma letra para dos incógnitas o datos.**
3. **Representar cada una de las condiciones a través de una expresión algebraica.**
4. **Identificar la ecuación o ecuaciones obtenidas y resolverlas por los métodos conocidos.**
5. **Verificar que la solución o soluciones halladas resuelven efectivamente el problema original.**

¡Hazlo tú mismo!

En equipo

En equipos resuelvan los siguientes problemas:

1. **Johana llevó su automóvil a servicio, por el cual le cobraron la mitad del total por la verificación de frenos, una tercera parte del total por el balanceo y $250.00 por una refacción. ¿Cuánto pagó por el servicio?**
2. **Joaquín diseña un cartel publicitario que deba tener un largo de 1.6 veces el ancho y área de 2 m². ¿Cuáles son las dimensiones del anuncio?**
3. **Sebastián cuenta el número de patas de los animales en su corral, donde hay sólo ovejas y cabras. Se da cuenta de que las extremidades de unas y otras suman 132, mientras que la diferencia es de 12. ¿Cuántas cabras y cuántas ovejas hay?**
4. **Propongan tres problemas cuya solución se obtenga resolviendo la ecuación $6x^2 - 10x + 3 = 0$.**
5. **En grupo discutan las soluciones y los métodos a fin de resolver las ecuaciones usadas para los problemas anteriores.**

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Lección 29

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.
Contenido: Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Secciones cónicas y secciones cilíndricas

Las secciones cónicas son figuras geométricas que aparecen en varios ámbitos de la vida cotidiana y de la ciencia; por ejemplo, los planetas del sistema solar y tanto los cometas como los asteroides que lo visitan describen *secciones cónicas:* la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

En el caso de la construcción de instrumentos ópticos toman especial relevancia las parábolas, parte principal de los telescopios de reflexión. Permiten también describir con bastante precisión la trayectoria de partículas y objetos que se desplazan en regiones cercanas a la superficie terrestre, con campo gravitacional prácticamente constante; cabe pensar, por ejemplo, en la trayectoria de un balón de basquetbol lanzado hacia el tablero.

En la sección exploraremos algunas formas intuitivas de construir y entender las secciones cónicas.

Punto de partida

En parejas consideren el triángulo de la figura 29.1. Hallen los valores de *x* y de *y*. Justifiquen cómo llegaron a la solución.

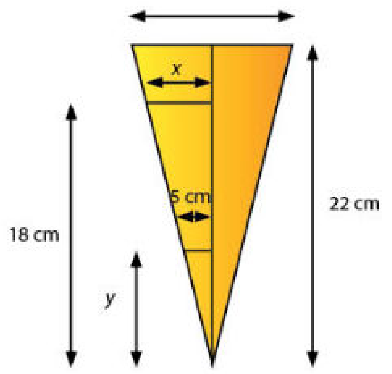


Figura 29.1 Triángulo invertido con varios cortes.

Con masilla para moldear (plastilina, barro o masa de maíz) formen un cono como el mostrado en la figura 29.2, cuya base sea lo más parecida a un círculo y la altura represente dos veces el diámetro de la base; de preferencia, que ésta corresponda a un círculo de 10 cm de diámetro.

a) ¿Cómo la moldearon para formar el cono? __________

Figura 29.2 Cono de masa.

Consigan una lámpara de mano y enciéndanla en un lugar oscuro. Tómenla con ambas manos y extiendan los brazos al frente, dirijan la luz hacia una pared. Respondan las siguientes preguntas:

b) ¿Qué figura forma la proyección del haz en el muro? __________

c) ¿Qué figura forma la superficie del haz? __________

d) ¿Qué ocurre con el tamaño de la proyección si se acercan a la pared? __________

e) ¿Y si se alejan de ella? __________

En grupo y con la guía del profesor comuniquen y discutan sus observaciones.

Aprendemos

En equipo

1. En equipos hagan lo pedido en cada inciso y respondan las preguntas.

a) Con un cúter, espátula o tarjeta telefónica inservible seccionen el cono de masilla a la mitad de la altura (recuerden: el uso de instrumentos de corte exige la presencia de un adulto.) ¿Qué figura forma el corte? Dibújenlo en el cuaderno. __________

b) Corten el cono en las alturas indicadas en la tabla 29.1 y complétenla:

Altura	1 cm	3 cm	5 cm	7 cm	9 cm
Radio					

Tabla 29.1

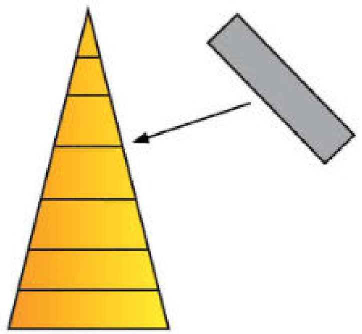


Figura 29.3 Vista lateral del cono.

c) Grafiquen en su cuaderno los valores hallados en la tabla anterior. Dispongan en el eje horizontal los radios; y en el vertical, las alturas. ¿Qué observan? __________

d) ¿De qué manera depende la altura del radio? __________

e) Con base en la respuesta del inciso anterior, ¿cuánto vale el radio para una altura de 6 cm? __________

En contexto

A las mujeres jirafa de Tailandia también se les conoce como mujeres de cuello largo, los anillos se incrementan a partir de la tráquea desde los 5 hasta los 12 años y se van añadiendo hasta que el cuello llegué al tope, observa la foto ¿qué forma geométrica tiene su cuello?

Kjersti Joergensen / Shutterstock.com

2. **Corten el cono de masilla a una altura de 6 cm y midan el radio correspondiente.**

a) ¿Qué observan? ______________________

____

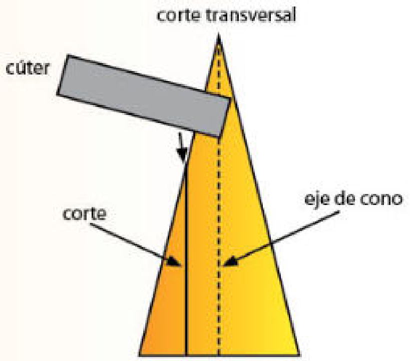


Figura 29.4 Corte transversal del cono.

3. **En equipos corten el cono de masilla de manera transversal, paralela al eje, como se indica en la figura 29.4.**

a) ¿Qué figura forma el corte? ______________________

4. **Hagan dos cortes transversales del cono: el primero cerca del vértice y el segundo en las proximidades de la base.**

a) ¿En qué se asemejan y en qué difieren los cortes? ______________________

b) ¿Qué se concluye sobre los cortes cercanos al vértice respecto a los próximos a la base? ______________________

c) ¿Cuáles son las diferencias y las semejanzas de los cortes transversales del cono y los paralelos a la base examinados en el punto 1?

____

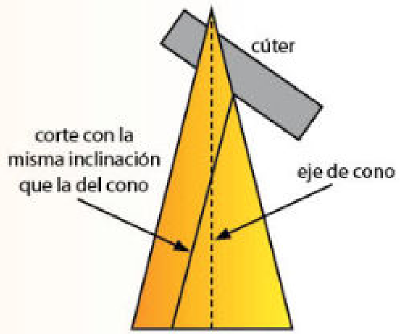


Figura 29.5

5. **En equipos seccionen el cono de tal manera que el corte tenga la misma inclinación que el cuerpo, como se muestra en la figura 29.5.**

a) ¿Qué figura forma el corte? Dibújenlo en el cuaderno. ______________________

b) ¿Cuáles son las diferencias y semejanzas de estos cortes con las figuras formadas por los hechos en los puntos1 y 2? ______________________

c) Realicen otros dos cortes sesgados con la misma inclinación que el cono: el primero cerca del vértice y el segundo en las proximidades de la base. ¿Qué observan? ¿En qué se asemejan y en qué difieren ambos?

____

____

d) ¿Qué se concluye sobre cortes cercanos al vértice respecto a cortes cercanos a la base? ______________________

6. **En equipos respondan la siguientes preguntas:**

a) ¿Existe un corte que pueda hacerse al cono, distinto a los hechos en los puntos 1, 2 y 3? ______________________

b) En caso afirmativo, ¿qué propiedad tiene dicho corte y qué figura forma? ¿En qué se asemeja y en qué difiere de los cortes anteriores? ______________________

7. **En grupo y con la guía del profesor comuniquen y discutan las respuestas de las preguntas anteriores que halló cada equipo.**

¡Ya lo aprendimos!

Al cortar con un plano un cono circular recto se obtienen distintas figuras geométricas, *secciones cónicas* (figura 29.6). Según la inclinación relativa del corte respecto al eje de dicho cuerpo, éstas se clasifican en circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas.

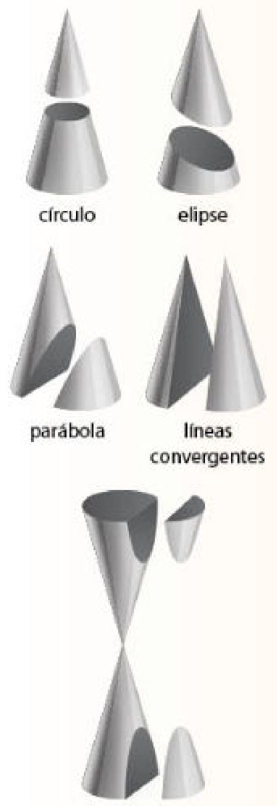


Figura 29.6 Secciones cónicas.

Individual

1. **De manera individual investiga cómo se define cada una de las secciones cónicas.**
2. **En parejas identifiquen cada sección cónica con las figuras obtenidas en la sección Aprendemos. ¿Qué corte produce cada sección cónica?** ______________________
3. **En grupo y con la guía del profesor comuniquen y discutan las respuestas que cada pareja dio al punto 2.**

¡Hazlo tú mismo!

1. **En equipos elaboren un cilindro de masilla como el mostrado en la figura 29.7. Repitan las actividades de la sección Aprendemos y contesten las siguientes preguntas:**

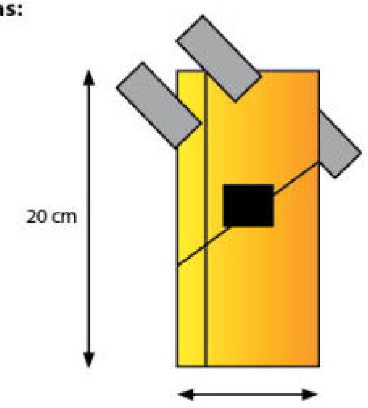


Figura 29.7 Cilindro.

a) ¿En qué se asemejan y en qué difieren las formas de los cortes hechos al cilindro de los aplicados al cono? Ofrezcan una respuesta detallada. ______________________

b) ¿Qué forma admite más tipos de cortes: el cilindro o el cono? ______________________

¿Por qué? ______________________

____

c) En grupo y con la guía del profesor comuniquen y discutan las respuestas de las preguntas anteriores que halló cada equipo.

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

Lección 30

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.
Contenido: Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencias las fórmulas de prismas y pirámide.

El volumen de conos y cilindros rectos

En la actualidad, diversas situaciones involucran el cálculo del volumen de conos y cilindros rectos, así como la relación entre ellos. Desde el tiempo de los griegos, éste ha sido uno de los problemas con más aplicaciones en la vida cotidiana.

Matemáticos de la talla de Arquímedes han dedicado parte importante de su trabajo al desarrollo de fórmulas para obtener el volumen de estos cuerpos geométricos.

Punto de partida

Eréndira tiene que llenar un tinaco de agua y dispone de sólo dos recipientes: uno cilíndrico y otro cónico, como se muestra en la figura 30.1.

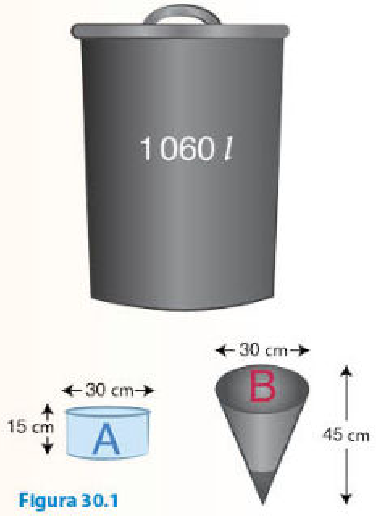


Figura 30.1

a) ¿Con cuál de los dos recipientes lo llenará más rápido? ______
¿Por qué? ______

b) Si decide usar el recipiente *A*, ¿cuántas veces tendrá que vaciar el contenido en el tinaco? ______
¿Y si opta por el *B*? ______

Aprendemos

En equipo

Reúnanse en equipo de trabajo para realizar las siguientes actividades:

1. **Donají quiere diseñar una pecera que pueda colocar sobre una base circular de 40 cm de radio, como se muestra en la figura 30.2. Primero desea determinar la forma de la base a partir de un polígono regular inscrito en la circunferencia. Analicen sus bosquejos.**

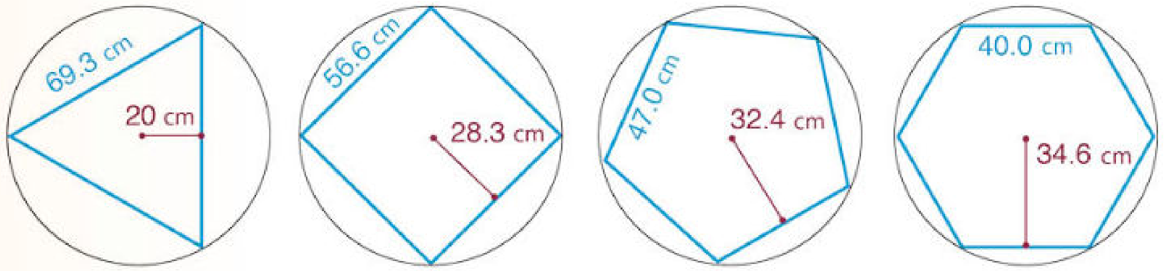


Figura 30.2

a) ¿Cuánto mide el área de la circunferencia? ______

b) ¿Cuánto la del triángulo? ______

c) ¿Cuál es la diferencia entre el área del círculo y la del triángulo? ______

d) Dibujen en el cuaderno los polígonos regulares de 7, 8, 9 y 10 lados, inscritos en círculos del mismo diámetro que los de la figura 30.2.

e) Completen la información de la tabla 30.1:

Número de lados	Longitud de un lado (cm)	Apotema (cm)	Área (cm²)
3	69.3	20	
4			
5			
6		34.6	
7			
8			
9			
10			

Tabla 30.1

Glosario

apotema: distancia del centro a uno de los lados de un polígono regular.

En contexto

El estudio de los astros, como pudiera parecer, no ha sido exclusivo de los hombres: se tiene noticia de que, desde el año 2300 antes de nuestra era, existió una mujer astrónoma que vivió en Babilonia y que se llamó En'heduana; otro ejemplo de esto es Hipatia de Alejandría (s. IV), a quien se le atribuye la invención del astrolabio. En nuestro país tenemos actualmente astrónomas de renombre internacional como la doctora Julieta Fierro, quien además de dedicarse a la divulgación científica, ha recibido varios galardones tanto en nuestro país como en el extranjero. La astronomía es una ciencia con equidad de género, por medio de las contribuciones que hombres y mujeres de ciencia han hecho por igual.

2. **Con base en la información de la tabla, reflexionen en torno de las siguientes preguntas. Escriban una descripción breve de la conclusión del equipo:**

a) ¿Cuál es la menor longitud que puede medir una apotema de un polígono inscrito en el círculo? ______
¿Por qué? ______

b) ¿Cuál es la mayor longitud que puede medir una apotema de un polígono inscrito en el círculo? ______
¿Por qué? ______

c) ¿Cómo cambia el área de los polígonos inscritos si su número de lados es de 20, 30, 50 o 100? ______
¿Por qué? ______

d) ¿Cómo es la diferencia entre el área del círculo y un polígono de 20, 30, 50 o 100 lados? ______ ¿Por qué? ______

e) ¿Qué relación hay entre el perímetro de los polígonos y la circunferencia? ______

3. **Donají ha decidido construir una pecera con 50 cm de alto, pero con la base triangular (figura 30.3).**

a) ¿Qué volumen ocupará? ______

b) Describan el procedimiento usado para obtener el volumen. ______

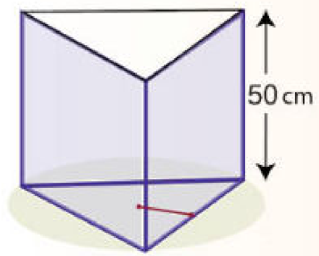


Figura 30.3

4. **Analicen los bosquejos de Donají. Las peceras cada vez tienen más lados laterales (figura 30.4):**

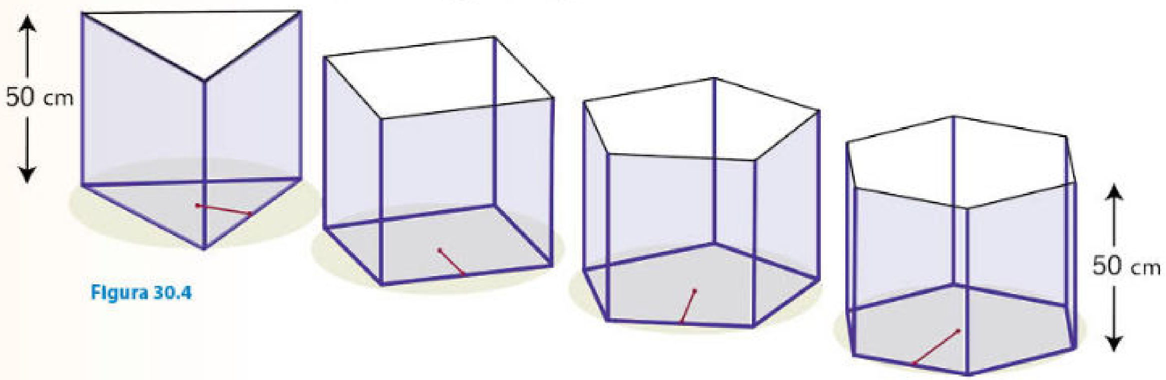


Figura 30.4

a) Con base en la información, completen la tabla 30.2:

Número de lados de la base	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabla 30.2

b) ¿Qué sucede con el volumen cada vez que se aumenta el número de lados del polígono de la base? ____________ ¿Por qué? ____________

____

c) ¿Cuál volumen máximo puede obtenerse si se aumenta indefinidamente el número de lados? ____________ ¿Por qué? ____________

____

d) ¿Cómo podría obtenerse el volumen de un cilindro cuya base sea el mismo círculo?

____________ Justifiquen matemáticamente esta respuesta.

____

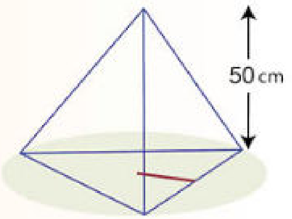


Figura 30.5

5. **A Donají se le ocurrió modificar su diseño original y planteó la posibilidad de diseñar una pecera con forma piramidal cuya base fuera el triángulo inscrito en el mismo círculo de las peceras anteriores (figura 30.5).**

a) ¿Qué volumen ocupará? ____________

b) Describan el procedimiento usado para obtener el volumen. ____________

6. **Analicen el caso en que en lugar de prismas, Donají diseña pirámides (figura 30.6):**

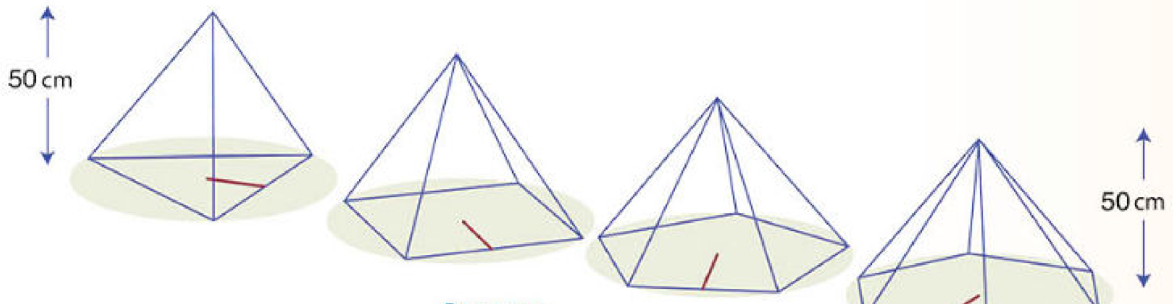


Figura 30.6

a) Con base en la información, completen la tabla 30.3:

Número de lados de la base	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabla 30.3

b) ¿Qué sucede con el volumen cada vez que se aumenta el número de lados del polígono de la base? ____________ ¿Por qué? ____________

____

____

c) ¿Cuál volumen máximo puede obtenerse si se aumenta indefinidamente el número de lados? ____________ ¿Por qué? ____________

____

____

d) ¿Cómo podría obtenerse el volumen de un cono cuya base sea el mismo círculo?

____________ Justifiquen matemáticamente esta respuesta. ____________

____

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Ya lo aprendimos!

El volumen de un cilindro cuyo radio de la base es r y su altura h está dado por la fórmula:

$$V = \pi r^2 h$$

El volumen de un cono cuyo radio de la base es r y su altura h está dado por la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

7. Analicen la figura 30.7, y después contesten:

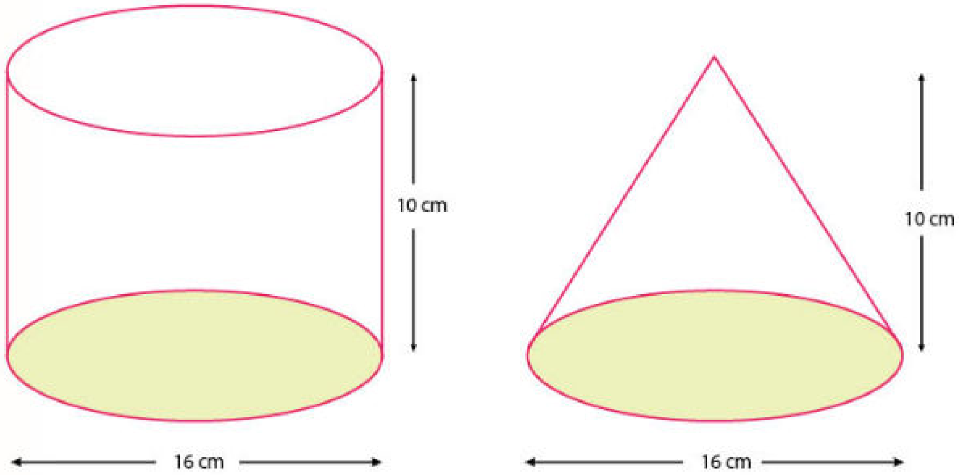


Figura 30.7

a) ¿Cuál es el volumen del cilindro? ______ ¿Y del cono? ______

b) ¿Qué relación hay entre estos volúmenes? ______

c) Argumenten matemáticamente la relación entre ambos. ______

d) ¿Cuál altura debe tener el cono para que su volumen sea igual al del cilindro? ______

¿Por qué? ______

8. Con los datos obtenidos en las tablas 30.2 y 30.3 completen la información de la 30.4. Después contesten:

Número de lados de la base	Volumen del prisma (cm^3)	Volumen de la pirámide (cm^3)
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabla 30.4

a) Para cada número de lados, obtengan el cociente entre el volumen del prisma y el de la pirámide. ¿Cómo es el resultado? ______

b) ¿Cómo usarías el comportamiento de la información de esta tabla para justificar la relación entre el volumen de un cilindro y un cono que tienen la misma base y altura? ______

¡Qué curioso!

Alrededor del año 200 de nuestra era, Arquímedes desarrolló un método que permitía comprender la relación entre el área de un polígono regular y el del círculo que lo contiene. Muchos escritos de esta importancia fueron extraviados, hasta que se descubrieron en una biblioteca de Constantinopla en 1906.

El método de Arquímedes yacía escondido en las hojas de un **palimpsesto** ("texto sobrescrito encima de una obra borrada"). El 1920, un coleccionista compró el escrito, vendido en subasta en 1998.

El último comprador, anónimo, donó el escrito para que las ideas de Arquímedes fueran mostradas al mundo. El trabajo de recuperación dura hasta estos días.

¡Hazlo tú mismo!

Regresemos al problema de Eréndira.

1. La cisterna tiene capacidad de 1 060 ℓ. ¿A cuántos centímetros cúbicos (cm^3) equivalen? ______

a) De los recipientes de que dispone, ¿qué cantidad de agua puede contener el cilíndrico? ______

b) ¿Cuál cantidad de agua cabe en el recipiente cónico? ______

c) ¿Qué relación hay entre el volumen de ambos recipientes? ______

Argumenta matemáticamente esta respuesta. ______

d) ¿Con cuál de los dos recipientes llenará más rápido el tinaco? ______

¿Por qué? ______

e) ¿Cuántas veces deberá vaciarse el recipiente *A* para llenar el tinaco? ______

Caja de herramientas

En la página http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/2quincena10_contenidos_3a.htm (Consulta: 24 de enero de 2017) podrás explorar de manera dinámica el efecto sobre el volumen de un prisma, al aumentar o disminuir el número de lados del polígono regular de la base.

Comenta con los compañeros los conceptos que se involucran en el interactivo con los estudiados en esta lección.

Lección 31

Eje: Forma, espacio y medida.
Tema: Medida.
Contenido: Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Cilindros y conos

En la vida cotidiana hay aplicaciones prácticas de los cuerpos geométricos llamados *cilindros y conos;* por ejemplo, los tanques de gas, la forma de los salchichones, los corchos de las botellas, las latas de conservas, los altavoces, los conos de prevención, las fotoceldas de forma cónica, los tinacos de agua y los silos para almacenar trigo.

¿Cuántas formas cilíndricas y cónicas reconoces en tu entorno cotidiano?

Punto de partida

Gaby tiene a su cargo una estación de hidratación, consistente en un dispensador de agua y conos de papel. Por ello debe prever la cantidad de piezas requerida para la de líquido que puede ofrecer (figura 31.1).

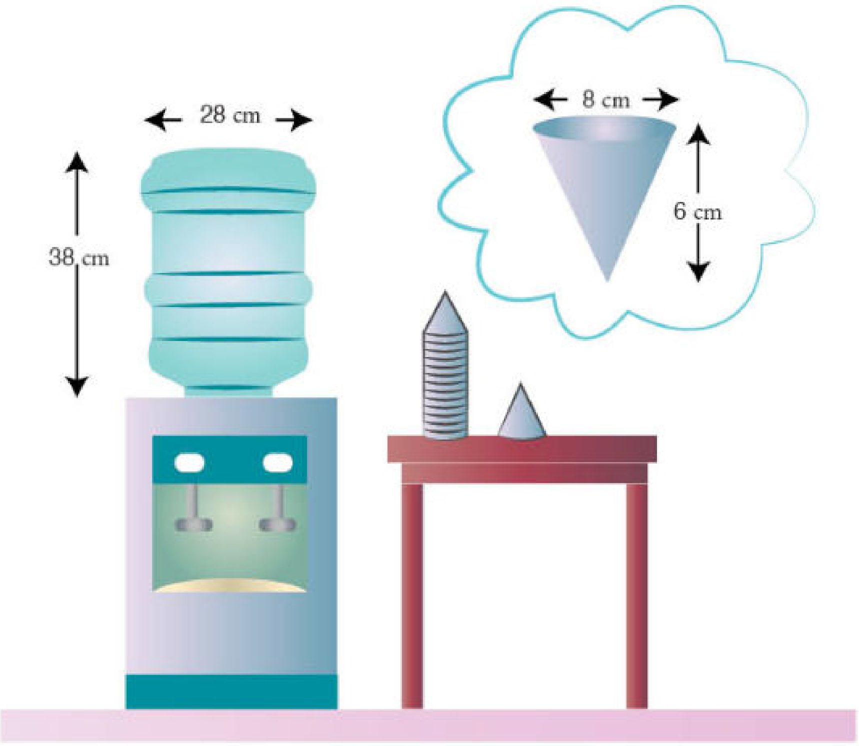


Figura 31.1

a) Si un garrafón lleno se coloca en el dispensador, ¿cuántos conos se llenarán? ______

b) Una onza anglosajona equivale a 29.57 cm³. ¿De cuántas onzas es el recipiente cónico que Gaby utilizará? ______

c) Si hubiera comprado conos de 6 cm de diámetro pero con la misma altura, ¿cuántos habría requerido? ______

En contexto

¿Sabes hidratarte?
Cuando sientas cansancio, dolor de cabeza, dificultad para concentrarte o malestar general, antes de suponer que un terrible virus se ha apoderado de tu cuerpo, cerciórate de que estás bien hidratado.
La cantidad de agua que debe ingerir una persona varía en función de la edad, el sexo, las condiciones de temperatura y humedad de la zona o del esfuerzo físico que se realice.
Esto es matemáticas aplicadas a la biología del ser humano.
Hidratarse incluso puede ser una actividad divertida, pues es posible tomar una variedad de bebidas en el transcurso día, incluyendo infusiones frías y hasta refrescos, pero… ¡cuidado con el azúcar!
Para mantener el equilibrio hídrico es necesaria una verdadera educación para la salud.
Para saber más, consulta http://www.hidratacionysalud.es/por_hidratacion.html
(Consulta: 13 de enero de 2017)

Aprendemos

En equipo

Reúnanse en equipos de trabajo para desarrollar las siguientes actividades:

1. **Una libra esterlina tiene 22.50 mm de diámetro y 3.15 de espesor.**
   a) Estimen el número de monedas necesarias para formar un cilindro con el mismo radio pero con volumen cercano a 1 200 mm³. ______
   b) ¿Qué volumen ocupa una libra esterlina? ______
   c) ¿Cuál ocupan 10 libras esterlinas apiladas? ______
   d) ¿Cuál ocuparía una moneda del mismo material pero con el doble de sus dimensiones? ______ ¿Y si se triplican éstas? ______ ¿Y si se cuadriplican? ______
   e) Describan con qué relación aumenta el volumen cuando se duplican las dimensiones de un cilindro. ______

2. **Una lata de frijoles mide 9.4 cm de alto y el radio de sus tapas circulares, 3.7 cm.**
   a) Estimen el volumen de la lata suponiendo que mide 8 cm de diámetro y 10 cm de alto. ______
   b) ¿Qué volumen real tiene la lata? ______
   c) ¿Cuál volumen ocuparía si la altura se aumenta al doble? ______
   d) ¿Cuál si la altura es la original pero el diámetro aumenta al doble? ______
   e) Describan el efecto sobre el volumen de un cilindro cuando se duplica la longitud del diámetro o la de su altura. ______

3. **Una empresa vitivinícola ha usado corchos cilíndricos de 54 mm de largo y 24 mm de ancho. Sin embargo, un nuevo análisis de calidad indica que la longitud podría reducirse sin que el producto pierda la calidad requerida en el mercado.**
   a) Estimen el volumen del nuevo corcho si de diámetro tuviera 20 mm y 50 mm de largo. ______
   b) ¿Qué volumen ocupa el corcho original? ______
   c) Si es posible reducir a 90% la longitud del corcho, ¿qué volumen de material se ahorrará por cada unidad? ______

4. **Una cafetera de forma cónica puede llenarse de agua hasta una altura de 20 cm, como se muestra en la figura 31.2.**
   a) Estimen el volumen total que ocupa la cafetera. ______
   b) Describan una manera de obtener el volumen de la cafetera sin la sección superior. ______

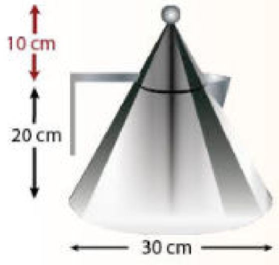


Figura 31.2

c) ¿Qué volumen total ocupa la cafetera? ______

d) ¿Cuánto mide el diámetro de la base del cono de la sección superior? ______

e) ¿Qué volumen de la cafetera puede llenarse de agua? ______

5. Dos jarras fueron diseñadas a partir del mismo molde cónico de 36 cm de altura, como se muestra en a figura 31.3 .

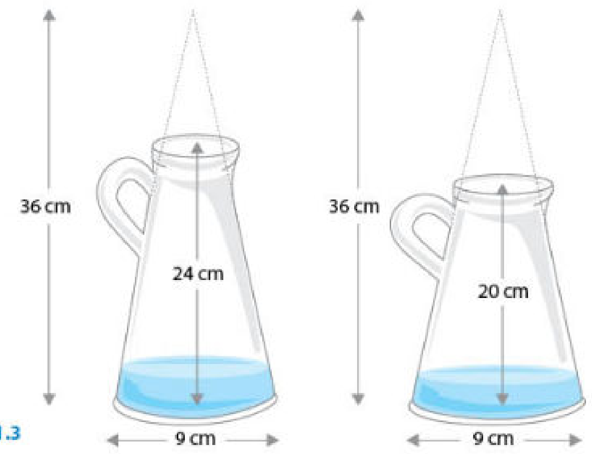


Figura 31.3

a) ¿Cuál es el volumen del molde? ______

b) ¿Cuál es el volumen de la jarra *A*? ______

c) ¿Cuál es el volumen de la jarra *B*? ______

d) ¿Cuál es la diferencia de volúmenes entre las jarras? ______

6. Se llama *cono de Abrams* a un objeto que permite medir la consistencia del concreto. Analicen la figura 31.4.

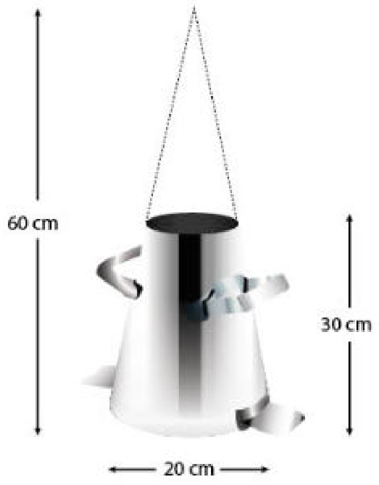


Figura 31.4

Caja de herramientas

En la página http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/2quincena10_contenidos_4b.htm (Consulta: 24 de enero de 2017) encontrarás un cilindro interactivo. Puedes modificar los parámetros que determinan el volumen a través de los deslizadores para el radio y la altura.

Manipula esos valores y observa el efecto sobre el volumen del cilindro. Comenta con los compañeros de grupo cómo ayudó este interactivo para interpretar las actividades y los problemas de la lección.

a) ¿Qué volumen ocuparía un cono con las dimensiones especificadas en la figura 31.4?

______

b) Describan una estrategia para obtener el volumen del cono de Abrams.

______

______

c) ¿Cuál volumen de concreto puede verterse en el cono de Abrams de la figura 31.4?

______

7. Una fábrica de muebles cilíndricos de piel ofrece tres modelos con la misma longitud (100 cm), pero con diámetros de 30, 40 y 50 cm, respectivamente.

a) Dibujen en el cuaderno los bosquejos de esas piezas. Después contesten.

b) ¿Cuál volumen ocupa cada cilindro? ______, ______ y ______.

c) ¿Qué volumen ocuparía una pieza con el mismo largo, pero cuyo diámetro sea el doble que aquélla cuyo diámetro es menor? ______

d) ¿Qué relación hay entre los volúmenes de los cilindros cuyos diámetros son de 30 y 40 cm? ______ Argumenten matemáticamente esta respuesta.

______

8. Dibujen en el cuaderno el bosquejo de tres cilindros que tengan 40 cm diámetro, pero 50, 100 y 150 cm de largo.

a) ¿Qué volumen ocupará cada pieza? ______, ______ y ______

b) ¿Qué relación hay entre el volumen de los muebles? Expliquen. ______

______

______

9. Un cilindro cuya base tiene un radio *r* y una altura *h*, tiene un volumen *V*. A partir de esta información realicen lo siguiente:

a) ¿Qué sucede con el volumen si se modifica la base del cilindro de manera que su radio sea $2r$? ______

b) ¿Qué efecto tiene sobre el volumen del cilindro si el radio se mantiene en r pero la altura se modifica a $2h$? ______

10. Analicen las respuestas de los problemas 7, 8 y 9. Después contesten lo siguiente:

a) Si se tiene un cilindro determinado y se construye otro con el doble de diámetro y de largo, ¿en qué proporción quedarán sus volúmenes? ______

¡Qué curioso!

Uno de los diseños más comunes en la construcción de tinacos y contenedores de agua atañe a las *tolvas*: éstas combinan las formas cilíndrica y cónica, lo cual favorece el mejor desempeño para el almacenaje y la distribución del agua, con el uso de la fuerza de gravedad (figura 31.5).

11. **Una pieza de ensamble tiene forma de cono y debe construirse en tres modelos diferentes: *A*, *B* y *C*. Los diámetros de la base deben medir 10 cm, pero las alturas 10, 15 y 20, respectivamente.**
    - *a)* ¿Qué volumen ocupa el objeto *A*? ________ ¿El *B*? ________ ¿El *C*? ________
    - *b)* ¿Qué relación hay entre el volumen de los conos *A* y *C*? ________
      Argumenten matemáticamente la respuesta. ________

12. **Dibujen en el cuaderno tres conos que tengan 10 cm de altura y cuyos diámetros de la base sean de 10, 20 y 30 cm, respectivamente. Después contesten.**
    - *a)* ¿Qué volumen ocupa cada cono? ________, ________ y ________.
    - *b)* ¿Qué relación hay entre el volumen de los conos? Expliquen. ________

13. **Un cono cuya base tiene un radio *r*, y una altura *h* tiene un volumen *V*. A partir de esta información realicen lo siguiente:**
    - *a)* ¿Qué sucede con el volumen si se modifica la base del cono de manera que su radio sea $2r$? ________
    - *b)* ¿Qué efecto tiene sobre el volumen del cilindro si el radio se mantiene en *r* pero la altura se modifica a $2h$? ________

14. **Analicen las respuestas de los puntos 11, 12 y 13. Después contesten la siguiente pregunta:**
    - *a)* Si se construye un cono con el doble de diámetro y de largo que uno dado, ¿en qué proporción quedarán sus volúmenes? ________

Evaluando al Equipo

Evaluemos nuestra participación en equipo para mejorarla.

1. Intercambien el libro y respondan en la opción que describa mejor su participación.
   - ¿Colaboró en la resolución de los problemas propuestos?
   - ¿Participó en el intercambio de resultados?
   - ¿Escuchó con atención los comentarios?
2. Recupera el libro y observa la evaluación. Identifica qué aspectos de tu participación debes mejorar.

¡Hazlo tú mismo!

Individual

1. **Analiza de nuevo el problema de la sección Punto de partida. Contesta lo siguiente.**
   - *a)* ¿Qué volumen de agua puede contener el garrafón? ________
   - *b)* ¿Qué volumen de agua soporta el vaso cónico? ________
   - *c)* ¿Cuántos conos se llenan hasta agotar el garrafón? ________
   - *d)* Si Gaby sirve 10 conos, ¿qué distancia recorre la altura del agua en el garrafón? ________
     Argumenta matemáticamente esta respuesta. ________

Revisen sus respuestas de la sección *Punto de partida* y verifiquen grupalmente los resultados. Si ahora es distinta la contestación, ubiquen dónde se determinó el cambio.

2. **Un cono y un cilindro tienen el mismo volumen y su diámetro en la base es igual. ¿Qué altura tiene el primero? ________ ¿Por qué? ________**

3. **Una tolva como la mostrada en la figura 31.5 se encuentra llena de agua; se abre la llave, que deja escapar 10 ℓ por segundo.**
   - *a)* ¿Qué tiempo tardará en quedar vacía? ________
   - *b)* ¿Cuántos litros contiene la sección cilíndrica? ________
   - *c)* ¿Cuántos la cónica? ________

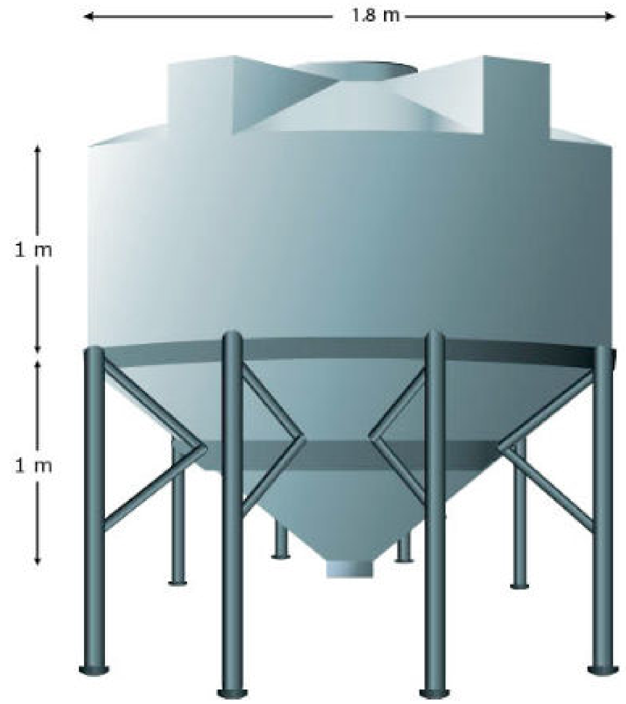


Figura 31.5

4. **Una tolva como la de la figura 31.5, pero con una llave de escape distinta, también es abierta exactamente a las 12:00 horas. A las 12:30 se ha consumido el agua de la sección cilíndrica. ¿A qué hora quedará vacío el contenedor? ________ Argumenta matemáticamente la respuesta. ________**

Lección 32

Eje: Manejo de la información.
Tema: Proporcionalidad y funciones.
Contenido: Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Variación lineal y cuadrática

A lo largo del curso has estudiado las relaciones funcionales entre conjuntos de cantidades, sus propiedades, características y representaciones. Aprender esto importa para el análisis de procesos y fenómenos relacionados con las ciencias, como física, química, biología e ingeniería.

En la lección estudiarás situaciones problemáticas que implican relaciones entre conjuntos de cantidades donde hay variación lineal o cuadrática. Analizarás sus representaciones algebraica, tabular y gráfica.

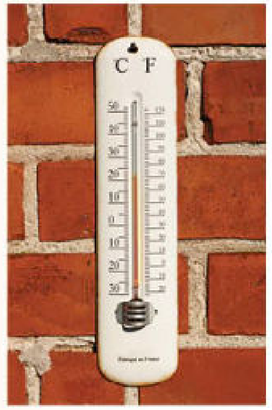


Figura 32.1 El termómetro, un ejemplo de aplicación gráfica de relaciones funcionales entre conjuntos de cantidades.

Punto de partida

Una agencia de noticias informa en su página electrónica sobre la temperatura de diferentes ciudades del mundo en grados Celsius (°C) y Fahrenheit (°F).

En el curso de Ciencias, segundo grado, estudiaste que la magnitud física que mide la cantidad de energía calorífica de cuerpos o sustancias es la temperatura, expresada en escalas Celsius (C), Fahrenheit (F) o Kelvin (K).

a) Para obtener la temperatura en grados Fahrenheit, se multiplica 1.8 por los grados Celsius y al resultado se suma 32. Completa la tabla 32.1, sobre la temperatura de diferentes ciudades:

Ciudad	°C	°F
Quito	19	
Winnipeg	−20	
Barcelona	6	
México, DF	13	
Viena	−12	
París	0	
San José	35	
Nueva York	−4	

Tabla 32.1

b) Si la temperatura en Estambul es de 77 °F, ¿a cuánto equivale en grados Celsius? ____________

c) ¿Cuántos grados Celsius son 86 °F? ____________

Representa con *x* la temperatura en grados Celsius y con *y* la correspondiente a Fahrenheit. Escribe la expresión algebraica que represente la relación entre ambas escalas. ____________

a) Si $x = 20$ °C, ¿cuánto vale *y*? ____________

b) Si $x = -25.5$ °C, ¿cuánto vale *y*? ____________

Escribe la expresión algebraica para calcular la temperatura en grados Celsius a partir de la expresada en Fahrenheit. ____________

a) Si $y = 95$ °F, ¿cuánto vale *x*? ____________

b) Si $y = -22$ °F, ¿cuánto vale *x*? ____________

Comenta con otros compañeros qué procedimientos efectuaron para obtener el valor de la temperatura en una escala, a partir del valor correspondiente en la otra escala. Comparen sus expresiones algebraicas.

En parejas comparen las expresiones algebraicas obtenidas y el procedimiento seguido para identificar la temperatura en grados Fahrenheit.

Aprendemos

Individual

1. Un recipiente tiene agua con temperatura inicial de 15 °C. Al colocarlo sobre una fuente de calor se observa que la temperatura aumenta 5 °C por minuto.

a) Escribe la expresión algebraica que represente la relación funcional entra la temperatura *T* del agua en el recipiente (en °C) y el tiempo *t* transcurrido (en minutos). ____________

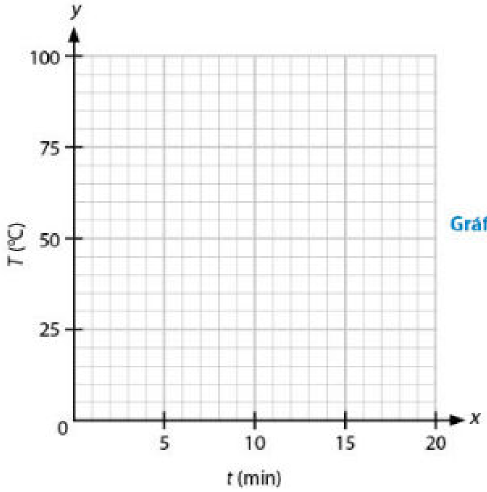
b) Calcula el valor de la temperatura del agua a los cuatro minutos. ____________

c) ¿Qué temperatura tendrá el agua después de un minuto? ____________

2. Aplica la expresión algebraica obtenida y completa la tabla de datos 32.2. Luego, construye la gráfica 32.1 con esos resultados.

t (min)	*T* (°C)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
8	
10	
12	
15	
17	

Tabla 32.2



Gráfica 32.1

a) ¿Qué temperatura alcanzará el agua transcurridos 20 minutos?

3. **Analiza los resultados en las actividades anteriores y contesta lo siguiente en el cuaderno:**

a) ¿Cómo es el tipo de relación funcional entre el tiempo t y la temperatura T del agua en el recipiente?

b) ¿Cómo es la forma de la expresión algebraica que relaciona el tiempo t y la temperatura T?

c) De acuerdo con la expresión algebraica y la gráfica, ¿cuál es el valor de la pendiente?

d) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen?

e) Si la temperatura inicial del agua fuera de 3 °C y el incremento de la temperatura generado por la fuente de calor es de 8 °C por minuto, ¿cuál sería la expresión algebraica asociada a esta situación?

Comparte con los compañeros las respuestas. Discutan cuáles características reconocen en la relación funcional entre el tiempo t y la temperatura T del agua en el recipiente (consideren las representaciones algebraica, tabular y gráfica).

¡Ya lo aprendimos!

Una relación funcional entre dos conjuntos de cantidades la estudiamos a partir de sus representaciones algebraica, tabular y gráfica. Cada una de éstas brinda información respecto al fenómeno o proceso que se modela.

Por ejemplo, la relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit está dada por la expresión algebraica $y = 1.8x + 32$, donde la variable y (°F) depende o está en función de la variable x (°C), y los números 1.8 y 32 son constantes.

La relación inversa de la expresión anterior está dada por $x = \frac{y - 32}{1.8}$; y se obtiene al despejar la variable x. Así, la variable x está en función de la variable y.

4. **Un cuerpo sumergido en agua siente el efecto de la presión debido al peso de ésta; por tanto, a mayor profundidad en ese medio, mayor presión. Este fenómeno físico se conoce como *presión hidrostática*.**

En un experimento se tiene que la relación funcional entre la presión ejercida por el agua y la profundidad a que está sumergido un cuerpo se da de manera aproximada por la expresión algebraica siguiente:

$$p = 1 + 0.1h$$

Donde h es la profundidad, medida en metros (m); y p, la presión del líquido, en atmósferas de presión (atm). Una atmósfera de presión (1 atm) equivale a la presión que ejerce la atmósfera terrestre al nivel del mar.

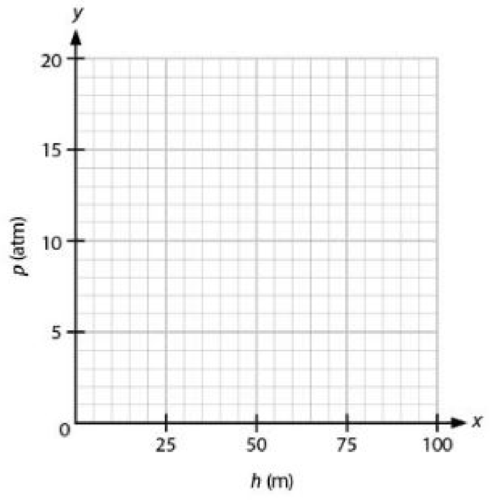
a) ¿Qué presión ejerce el agua sobre un cuerpo que está a 15 m? ______

b) ¿Qué presión se ejerce sobre uno que está a 29 m? ______

c) Completa la tabla 32.3 para conocer la presión hidrostática p (atm) a diferente profundidad h (m). Construye la gráfica 32.2 con los datos que obtengas.

h (m)	p (atm)
0	
10	
20	
30	
40	
50	
70	
90	
100	
130	
150	
190	

Tabla 32.3



Gráfica 32.2

En contexto

Conocer las condiciones climáticas de cualquier región del mundo se ha convertido en una práctica cotidiana. Con facilidad, podemos consultar la temperatura, humedad y probabilidad de lluvia que tendrá nuestra localidad, ya sea para un día o para un periodo. El pronóstico del clima es una herramienta útil, no sólo para saber cómo vestimos sino que también nos permite salvaguardar nuestra vida ante situaciones extremas como ciclones y huracanes.
Otra aportación de la ciencia y la matemática para el beneficio de la sociedad.

d) Si la presión hidrostática sobre un cuerpo es igual a 6 atm, ¿a qué profundidad se encuentra? ______

e) ¿Qué procedimiento realizaste para calcular la profundidad h a partir de la presión p?

______

______

f) Escribe la expresión algebraica para calcular la profundidad. ______

- Si $p = 8$ atm, $h =$ ______
- Si $p = 21$ atm, $h =$ ______

En equipos comparen sus expresiones algebraicas.

¡Ya lo aprendimos!

La expresión algebraica $p = 1 + 0.1h$ modela una relación funcional entre dos conjuntos de cantidades: la profundidad h a que se encuentra un cuerpo sumergido bajo el nivel del mar y la presión p que experimenta. En este caso, el valor de la pendiente m es igual a 0.1 y la ordenada al origen b es igual a 1.

La inversa de la expresión anterior está dada por $h = \frac{p - 1}{0.1}$ y se obtiene al despejar la variable p.

5. **Como parte de un experimento, investigadores de cierto centro ecológico introdujeron una población de venados en una reserva natural, con la intención de incrementar el número a partir de la población inicial.**

Se sabe que el número de venados V a lo largo de los años t está representado por la expresión siguiente:

$$V = 100 + 21t - t^2$$

Aplica la expresión anterior y responde lo siguiente:

a) ¿Cuántos venados se introdujeron en la reserva? ____________

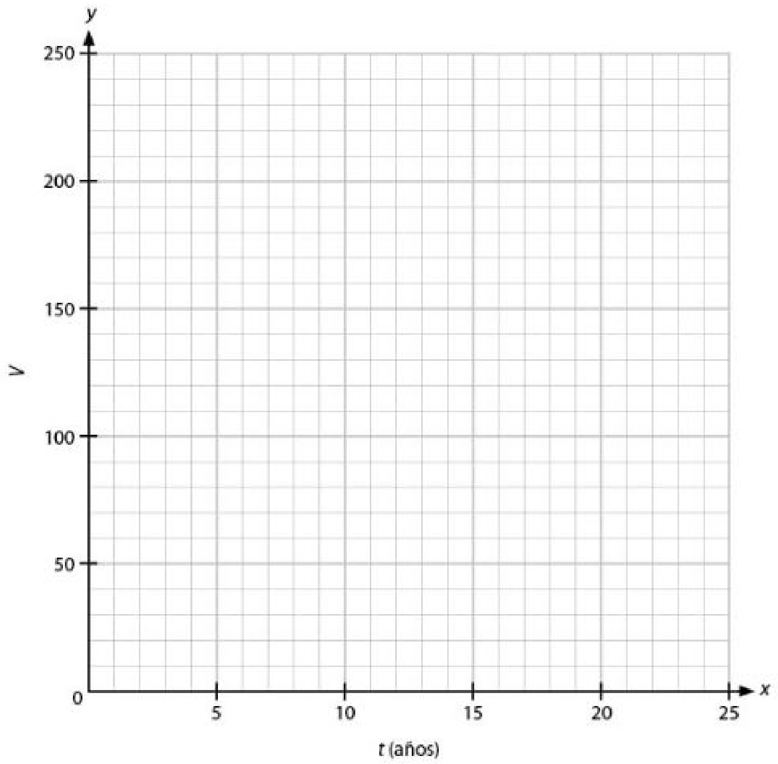
b) ¿Tras cuántos años el número de venados fue de 208? ____________

c) ¿Cuántos venados hubo al cabo de cinco años? ____________

d) Completa la tabla 32.4 y construye la gráfica 32.2 con los datos que obtengas:

t (años)	0	1	2	4	5	6	9	10	11	12	15	20	22	25
V														

Tabla 32.4



Gráfica 32.3

e) ¿Después de cuántos años la población fue la máxima? ¿A cuánto ascendió el número máximo de venados?

____

f) ¿Después de cuántos años se extinguiría la población?

____

En grupo

Comparen sus respuestas y comenten los procedimientos realizados para completar las tablas y trazar las gráficas.

¡Hazlo tú mismo!

1. **Analiza las siguientes expresiones algebraicas:**

$$y = 4x + 2.5$$

$$y = \frac{3}{4}x - 4$$

$$y = 5.6x$$

a) ¿Cuál expresión algebraica tiene asociada una gráfica con menor pendiente?

____

b) ¿Cuál tiene asociada una gráfica con mayor ángulo de inclinación?

____

2. **Los ingresos mensuales de una fábrica de refacciones están dados por la función: $y = 100x - 2x^2$, donde y representa los ingresos mensuales (en pesos) y x representa la cantidad de refacciones fabricadas en un mes.**

a) En el cuaderno construye la gráfica asociada a esta relación.

b) Analiza la gráfica que construiste y responde lo siguiente:

- Si decimos que la ganancia fue de 1 000 pesos aproximadamente, ¿cuántas máquinas se fabricaron?
- ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican cinco máquinas?
- ¿Cuántas máquinas deben fabricarse mensualmente para obtener el mayor ingreso?
- ¿A partir de qué cantidad de máquinas se comienza a tener pérdidas?

TIC y más

Para practicar más problemas de razón de cambio, consulta el recurso interactivo *Relaciones funcionales* en la dirección electrónica https://univiasecmate3.wordpress.com/2012/05/26/clase-1-relaciones-funcionales/ (Consulta: 24 de enero de 2017)

Lección 33

Eje: Manejo de la información.
Tema: Nociones de probabilidad.
Contenido: Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Eventos con igual probabilidad

El conocimiento desarrollado alrededor de los experimentos aleatorios se aplica en concursos y premios que se transmiten por diversos medios de comunicación. En la mayoría de estos juegos, se observan aquellos que tienen pocos resultados favorables en relación con el resto del espacio muestral, esta característica sirve para asignar mejores premios a los ganadores de esos concursos.

En esta lección analizarás experimentos donde identificarás cuándo dos eventos son o no independientes, y calcularás la probabilidad correspondiente.

Punto de partida

Daniela, Ernesto y Fernanda jugarán a *El mayor puntaje:* con las ruletas *D, E* y *F,* respectivamente (figura 33.1).

Cada jugador hará girar tres veces la ruleta correspondiente y registrará los puntos obtenidos por ronda, de acuerdo con el color que señale la flecha en la ruleta. Gana quien acumule más puntos.

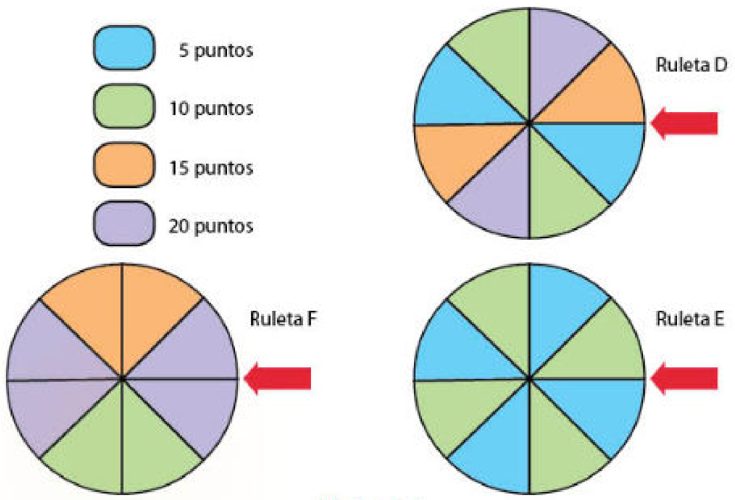


Figura 33.1

a) ¿Quién consideras que ganará? ______________ Explica por qué. ______________

____

b) Para cada jugador escribe en la tabla 33.1 los resultados que consideres obtendría por ronda:

Jugador	Ruleta	Puntos obtenidos en cada ronda			Puntaje
		Primera	Segunda	Tercera	
Daniela	*D*				
Ernesto	*E*				
Fernanda	*F*				

Tabla 33.1

c) Si repiten el juego con la misma ruleta, ¿ganará el mismo participante? ______

¿Por qué? ____

d) Si repiten el juego pero ahora a cinco rondas, ¿ganará el mismo? ______

¿Por qué? ____

e) ¿Es probable que algunos jugadores obtengan el mismo puntaje en tres rondas? Explica quiénes y por qué. ____

____

Comparen sus respuestas. Comenten si *El mayor puntaje*, como está planteado, es un juego justo o no. Argumenten.

Aprendemos

Individual

1. **Supongamos ahora que Daniela, Ernesto y Fernanda juegan a una sola ronda.**

a) ¿Quién consideras que obtendría el mayor puntaje? ______________

b) ¿Qué es más probable, que haya un solo ganador o empate por obtener el mismo puntaje? ______________

c) Jugar a obtener el mayor puntaje en una sola ronda, ¿es un reto justo? ______

Justifica la respuesta. ____

2. **Para cada ruleta calcula la probabilidad del evento *A:* obtener 5 puntos en una ronda; y la del complemento del evento *A':* no obtener 5 puntos en una ronda.**

Ruleta *D:* P(*A*) = P(*A'*) =

Ruleta *E:* P(*A*) = P(*A'*) =

Ruleta *F:* P(*A*) = P(*A'*) =

a) ¿Alguna ruleta tiene la mayor probabilidad para el evento *A*? ______________

¿Cuál o cuáles? ____

b) ¿Alguna la tiene para el *A'*? ______ ¿Cuál o cuáles? ______________

c) Según estos resultados, ¿qué jugador tiene la mayor probabilidad de ganar en una ronda? ____

3. **Para cada ruleta calcula la probabilidad del evento *B:* obtener 20 puntos en una ronda; y la del complemento del evento *B':* no obtener 20 puntos en una ronda.**

Ruleta *D:* P(*B*) = P(*B'*) =

Ruleta *E:* P(*B*) = P(*B'*) =

Ruleta *F:* P(*B*) = P(*B'*) =

a) ¿Alguna ruleta tiene la mayor probabilidad para el evento *B*? ______

¿Cuál o cuáles? ______

b) ¿Alguna la tiene para el *B*? ____ ¿Cuál o cuáles? ______

c) Según estos resultados, ¿qué jugador tiene la mayor probabilidad de ganar en una ronda? ______

4. Para cada ruleta calcula la probabilidad del evento *C*: obtener 15 puntos o más.

Ruleta *D*: P(*C*) =

Ruleta *E*: P(*C*) =

Ruleta *F*: P(*C*) =

a) ¿Alguna ruleta tiene la mayor probabilidad para el evento *C*? ______

¿Cuál o cuales? ______

b) Revisa los resultados y explica si jugar a obtener el mayor puntaje en una sola ronda es un reto justo o no. ______

Analicen sus respuestas y comenten si el juego de obtener el mayor puntaje con las ruletas *D*, *E* y *F* es justo o no.

Identifiquen algún evento que tenga la misma probabilidad de ocurrir en las tres ruletas en una ronda.

5. Considera ahora que con las mismas ruletas, Daniela, Ernesto y Fernanda deciden jugar a obtener exactamente 25 puntos en dos rondas. Para cada participante escribe en la tabla 33.2 los resultados que supones se obtendrían por ronda:

Jugador	Ruleta	Puntos obtenidos por ronda		Puntaje
		Primera	Segunda	
Daniela	*D*			
Ernesto	*E*			
Fernanda	*F*			

Tabla 33.2

a) Para cada ruleta calcula la probabilidad del evento *G*: obtener 25 puntos en dos rondas.

Ruleta *D*: P(*G*) =

Ruleta *E*: P(*G*) =

Ruleta *F*: P(*G*) =

b) ¿Alguna ruleta tiene la mayor probabilidad para el evento *G*? ______

¿Cuál o cuales? ______

c) Revisa tus resultados y explica si jugar a obtener el mayor puntaje en una sola ronda es un juego justo o no. ______

d) Supón que nuevamente juegan a dos rondas, pero ahora a obtener *el menor puntaje*. ¿Quién posee mayor probabilidad de ganar? ______

Explica por qué. ______

______

¡Ya lo aprendimos!

En los problemas anteriores identificaste que en un juego hay eventos con mayor probabilidad de ocurrir que otros.

Si dos eventos tienen la misma probabilidad de ocurrir, decimos que son eventos equiprobables. Por ejemplo, al lanzar un dado los eventos *M*: obtener número par y *N*: obtener número primo, tienen la misma probabilidad de sucede; es decir, son equiprobables:

$M = \{2, 4, 6\}; P(M) = \frac{3}{6} = 0.5$

$N = \{2, 3, 5\}; P(N) = \frac{3}{6} = 0.5$

Decimos que un juego de azar es justo si todos los participantes poseen igual probabilidad de ganar en cada turno o partida; esto significa que ninguno debe tener ventaja.

6. Salvador y Mariana juegan *Llegar a 5*, el cual consiste en lo siguiente:

- Ambos intentarán alcanzar primero cinco puntos. Usarán respectivamente un dado y una ruleta, como los mostrados en la figura 33.2.
- Por turnos, uno lanza el dado y otra gira la ruleta. Si alguien obtiene el número 4, gana un punto. Registran en una hoja cada punto acumulado.
- El juego concluye cuando alguien obtiene cinco puntos.

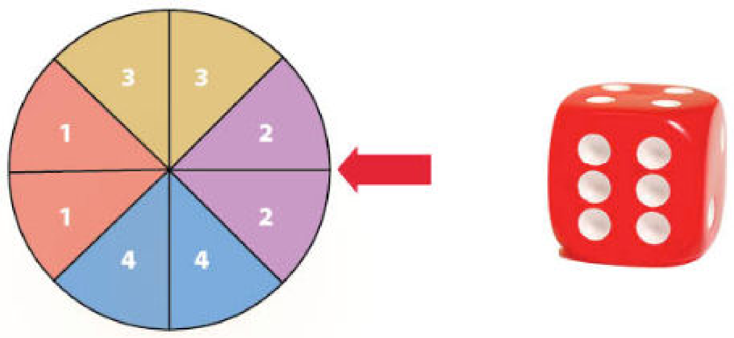


Figura 33.2

Salvador jugará con el dado; y Mariana, con la ruleta.

a) ¿Quién consideras que gane? ____________________

b) Al término de cinco turnos, ¿quién habrá obtenido más puntos? __________

c) Calcula la probabilidad del evento *R:* obtener 4 en el dado.

P(*R*) =

d) Calcula la probabilidad del evento *S:* obtener 4 en la ruleta.

P(*S*) =

e) ¿Los eventos *R* y *S* son equiprobables? ____________________

Explica por qué. ____________________

7. **Los jugadores deciden cambiar la regla: ganarán un punto si cae un número par en el dado o en la ruleta.**

a) ¿Quién consideras que gane en esta ocasión? ____________________

b) Al término de cinco turnos, ¿quién habrá obtenido más puntos? __________

c) Calcula la probabilidad de *T:* obtener un número par en el dado.

P(*T*) =

d) Calcula la probabilidad de *U:* obtener un número par en la ruleta.

P(*U*) =

e) Compara las probabilidades e identifica quién podrá obtener primero los cinco puntos.

____

f) ¿Los eventos *T* y *U* son equiprobables? ____________________

Explica por qué. ____________________

8. **Escribe un evento donde al jugar con la ruleta siempre sea posible avanzar.**

Evento *H:* ____________________

a) Calcula la probabilidad de obtener un punto con el evento *H.*

Dado: P(*H*) =

Ruleta: P(*H*) =

b) Intercambia el evento con algún compañero. Escribe el suyo.

Evento ____ = ____________________

c) Calcula la probabilidad de que ocurra el del compañero. __________

d) Analiza tus respuestas anteriores y responde lo siguiente:

- Según los eventos que escribieron tu compañero y tú, ¿siempre ganas puntos con la ruleta? ____________________
- ¿Siempre ganas puntos con el dado? ____________________
- Plantea otro evento con el que siempre avance el dado. __________

____

Comparen sus respuestas en equipo. Comenten: si en vez de recibir un punto cuando sale el 4 se obtiene ante un número par, ¿con qué se tiene mayor probabilidad de ganar que otro, con la ruleta o con el dado? Justifiquen sus respuestas.

¡Ya lo aprendimos!

En los problemas previos estudiaste que eventos como *caer en un número par* y *caer en 4*, tanto en la ruleta como en el dado, son las reglas con las cuales se realiza cada juego.

Para ciertos juegos de azar, dichas reglas dan mayor ventaja a un resultado que a otro, lo cual significa la existencia de eventos con más probabilidad de suceder.

En estos casos, si el juego implica un premio, para hacerlo justo se otorgaría uno mejor a los eventos con menor probabilidad de ocurrir.

¡Hazlo tú mismo!

Individual

Resuelve en el cuaderno los siguientes problemas:

1. **Un juego de azar consiste en lanzar un dado y hacer girar una ruleta, como los mostrados en la figura 33.3.**

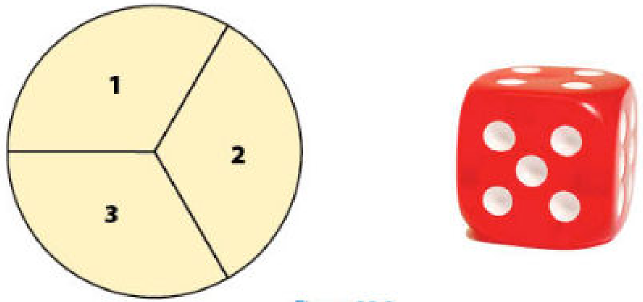


Figura 33.3

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Obtener la misma cifra con el dado y la ruleta.

b) Sacar un 3 con el dado.

c) Obtener una suma de puntos inferior a 5.

d) Sacar un 5 con el dado y una suma de puntos inferior a 5.

e) No sacar un 5 con el dado.

TIC y más

Para practicar más problemas de razón de cambio consulta el recurso interactivo *La ruleta* en la dirección electrónica http://bibliotecaescolardigital.es/comunidad/BibliotecaEscolarDigital/recurso/la-ruleta/7b5a24a4-f732-4895-829a-a3db8c06e3db (Consulta: 24 de enero de 2017)

Lee cada situación y elige la respuesta correcta:

Situación 1. Un contenedor de granos de maíz está lleno hasta 70% de su capacidad. Se le sustraen 5 toneladas, y quedan sólo 20.

1. **¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa que el silo está a 70% de su capacidad?**

   a. $7x$ *b.* $70x$ *c.* $0.7x$ *d.* $0.3x$

2. **¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa que se sustraen 5 toneladas del tanque?**

   a. $7x - 50$ *b.* $70x - 5$ *c.* $0.7x - 5$ *d.* $70x - 5\,000$

3. **¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas muestra que han quedado al final sólo 20 toneladas?**

   a. $7x - 50 = 20$ *c.* $0.7x - 5 = 20$
   b. $70x - 5 = 20$ *d.* $70x + 20\,000 = 5\,000$

4. **Si se resuelve la ecuación que modela la situación 1, ¿cuál es la solución?**

   a. $x = 10$ *b.* $x = \frac{5}{14}$ *c.* $x = \frac{-5}{14}$ *d.* $x = \frac{5}{140}$

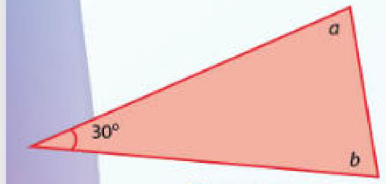


Figura 5.1

Situación 2. Consideren el triángulo de la figura 5.1. Si *a* es tres unidades mayor que *b*, ¿cuánto valen *a* y *b*?

1. **¿Cuál de las siguientes expresiones representa el hecho de que *a*, *b* y 30° son ángulos internos del triángulo?**

   a. $a + b + 30° = 180°$ *c.* $a + b = 180°$
   b. $a + b = 30°$ *d.* $(30°)\,ab = 180°$

2. **¿Cuál expresión algebraica describe que *a* es tres unidades mayor que *b*?**

   a. $b + 3 = a$ *b.* $a = b + 3$ *c.* $b - a = 3$ *d.* $a + b = 3$

3. **¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones describe la situación 2?**

   a. $a + b = 30$, $b - a = 3$ *b.* $a + b = 150$, $a - b = 3$ *c.* $a + b = 30$, $a - b = 3$ *d.* $ab = 60$, $a + b = 30$

4. **De acuerdo con la ecuación que modela la situación 2, los ángulos buscados son**

   a. $a = \frac{27}{2}$ y $b = \frac{33}{2}$ *b.* $a = 76.5$ y $b = 73.5$ *c.* $a = 16.5$ y $b = 13.5$ *d.* $a = 1 - \sqrt{155}$, $b = 1 + \sqrt{155}$

Situación 3. En un desfile del Día del Trabajo marcha un contingente de 120 personas en un número indeterminado de filas y columnas. Se sabe que el de las primeras excede en dos el de las segundas. ¿Cuál es el de unas y de otras?

1. **Si *n* denota el número de filas, ¿qué expresión algebraica representa el de columnas?**

   a. $n - 2$ *b.* $n + 2$ *c.* $2n$ *d.* $\frac{n}{2}$

2. **¿Cuál expresión algebraica representa que hay 120 personas en el contingente?**

   a. $n + (n + 2) = 120$ *c.* $n(n - 2) = 120$
   b. $2n^2 = 120$ *d.* $n(n + 2) = 120$

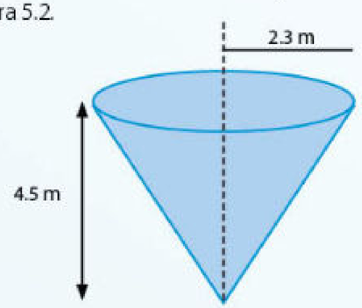
3. **¿Cuál ecuación describe la situación 3?**

   a. $2n - 118 = 0$ *b.* $n^2 - 2n - 120 = 0$ *c.* $n^2 + 2n - 120 = 0$ *d.* $2n^2 - 120 = 0$

4. **Resuelve la ecuación que modela la situación 3: ¿Cuál es el número de columnas y de filas del contingente?**

   a. 61 filas y 59 columnas *c.* 12 filas y 10 columnas
   b. 6 filas y 20 columnas *d.* 14 filas y 12 columnas

Situación 4. Un recipiente industrial en forma de cono sirve para vaciar cierta sustancia. La base corresponde a un círculo de radio 2.3 m y la altura del cono es de 4.5 m, como se muestra en la figura 5.2.



Recipiente cónico

Figura 5.2

1. **El volumen del recipiente es**

   a. 24.9 m³ *b.* 74.7 m³ *c.* 23.8 m³ *d.* Otro. Escríbelo. ______

2. **Si se llena el recipiente hasta una altura de 2 m, el volumen que ocupa el líquido es**

   a. 2.18 m³ *b.* 7.08 m³ *c.* 0.69 m³ *d.* Otro. Escríbelo. ______

3. **Si se llena el recipiente hasta una altura de 3 m, ¿qué proporción del volumen total representa el del líquido contenido?**

   a. 29.66% *b.* 90% *c.* 66% *d.* Otra. Escríbela. ______

4. **¿Hasta cuál altura debe llenarse el recipiente para que el líquido ocupe la mitad de la capacidad total?**

   a. 3.57 m *b.* 10.71 m *b.* 2.25 m *d.* Otra. Escríbela. ______

Bibliografía recomendada al profesor

Ávila, A., *Los decimales: más que una escritura*, México, INEE, 2008.

Batanero, Ma. C. *et al.*, *Razonamiento combinatorio*, Madrid, Síntesis, 1996.

Bracho, J., *¿En qué espacio vivimos?*, México, FCE, 1995.

Blatt, Frank J., *Fundamentos de Física (3ª ed)*, México, Prentice–Hall Hispanoamericana, 1991.

Bueche, Frederick J., *Física general*, México: McGraw-Hill, 2000, (Serie SCHAUM).

CECYTE, *Aprender a enseñar matemáticas*, Nuevo León, CECYTE, 2005.

De la Peña, J. A., *Álgebra en todas partes*, México, FCE, 2005.

Díaz, J. *et al.*, *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis, 1987.

García, S., *La enseñanza de la geometría*, México, INEE, 2008.

Moreno, L., *Educación, Matemática y Tecnología*, México, Santillana, 2010.

Santos, M., *La resolución de problemas matemáticos*. Fundamentos cognitivos, México, Trillas, 2007.

Bibliografía recomendada al estudiante

Berlanga, R. y C. Bosch, *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, México, FCE, 2002.

Bosch, C. *et al.*, *Una aventura a las formas, Biblioteca Juvenil Ilustrada*, México, Santillana, 2002.

Brandreth, G., *Juego con números*, México, Gedisa, 1990.

Gardner, M., *Acertijos matemáticos*, México, Selector, 1999.

Guik, E. Y., *Juegos matemáticos recreativos*, Moscú, Mir Moscú, 1987.

Langdon, N., *El fascinante mundo de las matemáticas*, México, Limusa, 2005.

Lecrerc, *Magia... ¡con matemáticas!*, México, Selector, 2007.

Moscovich, I., *Brainmatics*, Pekín, H.f. Ullmann, 2009.

Peterson, I., *Matelocuras*, México, Limusa, 2003.

Bibliografía

Bibliografía consultada

Chamoso, J., *Burbuja de arte y matemáticas*, Madrid, Nivola, 2009.

Hitt, F., *Funciones en contexto*, México, Prentice Hall, 2002.

Moscovich, I., *El gran libro de juegos para la mente*, Buenos Aires, Troquel, 2007.

Guik, E. Y., *Juegos matemáticos recreativos*, Moscú, Mir Moscú, 1987.

Kimberlinng, C., *Geometry in action*, Indiana, Key College Publishing, 2003.

Sánchez, J., *Juegos matemáticos y de razonamiento lógico*, Madrid, CSS, 2010.

Referencias bibliográficas

Karplus, Robert, *et al.*, "Proportional reasoning of early adolescents", En Lesh, R. & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, USA, Academic Press, 1983.

Lesh, Richard (1989), "Proportional Reasoning", en J. Hiebert, & M. Berh, *Number concepts and operations in the middle grades* (93–118), USA, National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, Richard y S. Lamon, *Assessment of authentic performance in school mathematics* (2a reimp.), USA, AAAS Press, 1992.

SEP-ILCE-Cinvestav, *Matemáticas III, Telesecundaria. 3er Grado, Vol. I.* México, Autor.

SEP-ILCE-Cinvestav (2009). *Matemáticas III, Telesecundaria, 3er Grado, Vol. II*, México: Autor.

Swokowski, Earl W. & Cole, Jeffery A., *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, 13 ed., México, Cengage Learning, 2011.

Bibliografía

Direcciones electrónicas

http://arquimedes.matem.unam.mx/descartes.org.mx/descartes/web/materiales_didacticos/Proporcionalidad_geometrica_amh/Teorema_%20de_Thales.htm
(Consulta: enero de 2017).

http://www.ilce.edu.mx/
(Consulta: enero de 2017).

http://www.nctm.org/
(Consulta: enero de 2017).

http://www.eduteka.org/
(Consulta: enero de 2017).

http://www.sep.gob.mx/
(Consulta: enero de 2017).

http://gama.dgsca.unam.mx/ruaproduccion/objeto/3810/ensenanza-de-las-matematicas-con-tecnologia-mas-sobre-geometria-dinamica
(Consulta: enero de 2017).

http://www.cabri.com/v2/pages/es/
(Consulta: enero de 2017).

http://www.softronix.com/
(Consulta: enero de 2017).

http://observatorio.cnice.mec.es/
(Consulta: enero de 2017).

http://www.aulaclic.es/excel2003/
(Consulta: enero de 2017).

https://masmates.net/
(Consulta: enero de 2017).

http://education.ti.com/
(Consulta: enero de 2017).

http://www.recursosmatematicos.com/
(Consulta: enero de 2017).

http://www.inegi.gob.mx
(Consulta: enero de 2017).

Fotografía:

© **Shutterstock.com**: p. 12 (ambas), p. 16; p. 24 (spirit of america); p. 25; p. 28; p. 31; p. 38; p. 44; p. 51; p. 58 (ambas); pp. 60 – 62; p. 63; p. 72 (todas); pp. 74 – 76; p. 86 (izq.); p. 92 (dcha.); p. 102; p. 104 – 106; p. 113 (ab.); p. 120 (izq.); p. 148; pp. 150 - 151; pp. 154 – 155; p. 60 (izq. y centro); p. 162 (arriba); p. 170 (izq.); p. 180 (ambas); p. 198 (ambas); p. 207 (Kjersti Joergensen); p. 218 (arr.); p. 222; p. 231 (dcha.); p. 233 (dcha.);

Carlos García Ortega y Salvador Torres: p. 50.

Ilustración:

John Paul Art: p. 14; p. 18; p. 20; p. 26; p. 41; p. 66; p.73; p. 76 (vochol); p. 77; pp. 78 – 79; pp. 82 – 83; p. 85 (arr. y centro); p. 86; p: 90 (arr.); p. 91 (centro y ab.); p. 124 (ab.); p. 125 (ab.); p. 126; p. 134; p. 135 (ab.); p. 137 (arr. y ab.); p. 139 (dcha. ab.); pp. 156 – 161; p. 163; p. 164 (ab.); p. 169; p. 171; p. 176 (arr.); p. 187; p. 190; pp. 194 – 195; p. 209 (dcha.)

Alexandro Portales Padilla: pp. 16 – 17; p. 19 – 23; p.25; pp. 27 - 31; p. 32; p. 35; p. 37; pp. 45 -46; pp. 56 – 57; p. 65; p. 67; p. 69 – 71; p. 77; pp. 80-81; pp. 84 – 85; pp. 87 – 92; p. 100; pp. 106 – 109; p. 110 (ab.); p. 112; p. 113 (arr.); p. 117; p. 118 (arr.); p. 119 (centro y ab.); p. 120 (centro y dcha.); p. 122; p. 124 (arr.); p. 125 (arr.); p. 128; pp. 130 – 131; p. 133; p. 135 (arr.); p. 136; p. 137 (centro); p. 138; p. 139 (centro y ab. izq.); pp. 146-147; p. 164 (arr.); pp. 166 – 167; p, 170 (ab.); p. 174 (arr.); pp. 181 - 182; p. 186; pp. 188 – 189; p. 197; pp. 206 – 208; p. 209 (ab.); p. 223; p, 225; p. 226; p. 228; p. 231 (izq.); p. 233 (izq.); pp. 234 – 235.

Diana Ortiz: p. 110 (arr.); p. 111; pp. 114 – 115; p. 118 (ab.); p. 119 (arr.); p. 162 (ab.); p. 168; p. 174; p. 176 (ab.); pp. 177-179; p. 196; pp. 210 – 214; pp. 216 – 217; p. 218 (ab.); p. 221.

Iconografía de diversa procedencia:

p. 15 © Google maps, foto aérea, disponible en: https://maps.google.com.mx/maps?q=Ucareo&hl=es-419&ie=UTF8&ll=19.874661,-100.674677&spn=0.010473,0.01929&sll=19.804067,-100.720553&sspn=0.005239,0.009645&oq=UCA&t=k&hnear=Ucareo,+Michoac%C3%A1n&z=16 (Consulta: enero de 2017); **p. 24** © Google Earth, foto aérea de la base geométrica donde se construyó la pirámide del museo de Louvre. (Consulta: enero de 2017).